ÉCOLES DE STATISTIQUE AFRICAINES

Mensa ACADEMY

Annales
CAPESA

Recueil des anciens sujets corrigés

Concours ITS voie B - Économie

Contactez-nous +237 655 333 073

Avant-propos

Ce document rassemble, de manière structurée et pédagogique, l'ensemble des informations utiles pour préparer les concours : ISSEA, ENSEA, ENSAE & ENEAM. Il a pour objectif d'aider les candidats à comprendre les formalités d'inscription, le contenu des programmes, les méthodes et conseils pour réussir les différentes épreuves (mathématiques, contraction de texte et ordre général), ainsi qu'un point synthétique sur les notions de statistique nécessaires. En dernière partie, une collection organisée des sujets et leurs corrigés (anciens et récents) sera ajoutée pour s'entraîner.

ATTENTION !!!

LE CONCOURS ITS B OPTION ÉCONOMIE A ÉTÉ SUPPRIMÉ PAR LE CAPESA DEPUIS 2020 !!

DONC, CE DOCUMENT VOUS DONNE JUSTE L'ACCÈS AUX ANCIENS SUJETS CORRIGÉS AFIN DE MIEUX PRÉPARER EFFACEMENT LES AUTRES CONCOURS A JOUR !

Lire : EFFICACEMENT

Les centres d'examens et Ecoles

Les coordonnées des centres d'examen sont mises à jour chaque année. Pour rappel, les inscriptions se font auprès des centres d'examen ci-dessous. Le CAPESA ne prend pas d'inscriptions.

BENIN Ecole Nationale d'Economie Appliquée et de Management (ENEAM) 03 BP 1079 Cotonou eneam.uac@eneam.uac.bj (+229) 21 30 41 68	**BURKINA FASO** Institut National de la Statistique et de la Démographie (INSD) Avenue Pascal Zagre 01 B.P 374 Ouagadougou 01 insd@insd.bf / insdbf@yahoo.fr (+226) 25 49 85 02
BURUNDI Institut National de la Statistique du Burundi (INSBU) Zone Rohero, Quartier INSS, Avenue de l'Aviation, N°06, BP 1156 Bujumbura ins.burundi@insbu.bi / ins.burundi2022@gmail.com (+257) 22 22 67 29	**CAMEROUN** Institut Sous-Régional de Statistiques et d'Économie Appliquée (ISSEA) rue Pasteur BP 294 Yaoundé isseacemac@yahoo.fr / contact@issea-cemac.org (+237) 22 22 01 34
COMORES Institut National de la Statistique des Études Économiques et Démographiques (INSEED) Place de France Moroni secrcom@inseed.km (+269) 333 9617 /334 6974	**CONGO** Institut National de la Statistique (INS) 22 bis rue Béhangle En face de l'ex radio Congo Brazzaville contact@ins-congo.org / cnsee@hotmail.fr (+242) 282 38 40
COTE D'IVOIRE Ecole Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée (ENSEA) Avenue des grandes écoles – campus de cocody 08 BP 3 Abidjan 08 ensea@ensea.ed.ci (+225) 22 48 32 00 / 22 48 32 32	**DJIBOUTI** Institut National de la Statistique de Djibouti (INSTAD) Bâtiment Saharion Heron B.P 3201 Djibouti insd@insd.gouv.dj (+253) 21 35 16 82 / 21 35 18 25
GABON Ministère de l'économie et de la Relance Direction Générale de la Statistique BP 2119 (sise à l'ancien Ministère de la Planification quartier Oloumi) Libreville infodgstat@gmail.com (+241) 01 72 04 55 / 01 72 13 69 / 01 76 06 71	**GUINEE** Institut National de la Statistique (INS) BP 221 Conakry – Kaloum info@insguinee.org (+224) 620 86 13 27
GUINEE EQUATORIALE Instituto Nacional de Estadistica de Guinea Ecuatorial (INEGE) Malabo II Edificio Abayak 4a Planta	**HAITI** Université Quisqueya 218 Avenue Jean Paul II Haut Turgeau

GUINEA ECUATORIAL info@inege.gq (+240) 222 196 724	Port au Prince uniq.haiti@gmail.com (+509) 2940 4587
MADAGASCAR Institut National de la Statistique (INSTAT) Rue Jules Ranaivo BP 485 Anosy Antananarivo 101 communication@instat.mg (+261) 32 11 878 79	**MALI** DGESRS Hamdallaye ACI 2000 Portes 445/449 Rue 331 BP 71 Bamako contact@dg-enseignementsup.ml (+223) 20 22 10 44
MAURITANIE Ambassade de France à Nouakchott Quartier de Tevragh Zeina Rue Ahmed Ould Mohamed BP 231 Nouackchott (+222) 45 29 96 99	**NIGER** Ecole Nationale de la Statistique (ENSTAT) 182 rue de la Sirba BP 13416 Niamey ins@ins.ne (+227) 20 72 35 60
REPUBLIQUE CENTRAFRICAINE **Institut Centrafricain des Statistiques et des Etudes Economiques et Sociales (ICASEES)** Rue Gamal Abdel Nasser BP 696 Bangui contact@icasees.cf / info@icasees.cf (+236) 72 05 25 93 / 75 72 47 58	**REPUBLIQUE DEMOCRATIQUE DU CONGO** **INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE (INS)** 6ème rue N°12 Limete Industriel Kinshasa contacts@ins.cd / ins@ins.cd (+243) 81 531 9943
SENEGAL **Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique Pierre NDIAYE (ENSAE)** Immeuble ANSD Rocade Fann Bel-Air Cerf-Volant BP 116 Dakar RP scolarite.ensae@ansd.sn (+221) 33 825 15 19	**TCHAD** **Institut National de la Statistique des Etudes Economiques et Démographiques (INSEED)** BP 453 N'Djamena info@inseed-td.net (+235) 22 52 31 54 / 52 66 13
TOGO **Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques et Démographiques (INSEED)** Immeuble CENETI 59 rue de la kozah BP 118 Lomé dgscn_tg@yahoo.fr / inseed@inseed.tg / inseedtogospdg@gmail.com (+228) 22 21 62 24 /22 21 22 87	**AFRISTAT** **Observatoire Économique et Statistique d'Afrique Subsaharienne** Directeur Général M. Paul Henri NGUEMA MEYE Rue 499, porte 23 Quartier Niaréla Bamako BP E 1600 Bamako MALI

	Tel : 00 223 20 21 55 00 / 20 21 60 71 Fax : 00 223 20 21 11 40 www.afristat.org
ENSAE **École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique** Directeur M. Pierre BISCOURP 5 avenue Henry Le Chatelier 91120 Palaiseau FRANCE Tel : 00 33 (0)1 70 26 67 00 www.ensae.fr	**ENSAI** **École Nationale de la Statistique et de l'Analyse de l'Information** Directeur M. Ronan LE SAOUT Campus de Ker-Lann 51 Rue Blaise Pascal 35172 BRUZ CEDEX FRANCE Tel : 00 33 (0)2 99 05 32 32 Fax : 00 33 (0)2 99 05 32 05 www.ensai.com
GENES **Groupe des Écoles Nationales d'Économie et Statistique** Directrice Générale Mme Catherine GAUDY 5 avenue Henry Le Chatelier 91120 Palaiseau FRANCE Tel : 00 33 (0)1 70 26 67 00 www.groupe-genes.fr	**INSEE** **Institut National de la Statistique et des Études Économiques** Directeur Général M. Jean-Luc TAVERNIER 88 avenue Verdier 92120 Montrouge FRANCE Tel : 00 33 (0)9 72 72 40 00 www.insee.fr
MEAE **Ministère de l'Europe et des affaires étrangères** **Direction Générale de la Mondialisation** 37 quai d'Orsay 75007 PARIS FRANCE Tel : 00 33 (0)1 43 17 53 53 www.diplomatie.gouv.fr	

Remarques et recommandations générales

Mathématiques

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : commencer le premier exercice de l'épreuve sans avoir au préalable parcouru le sujet ; se précipiter dans les calculs, ce qui entraine les erreurs ; utiliser des théorèmes sans leur nom ; utiliser la mauvaise méthode pour une démonstration (une bonne méthode achève rapidement une démonstration) ; utiliser de manière exagérée les quantificateurs ; des résultats non encadrés ou non soulignés et des copies très sales.

Erreurs fréquentes :

- Copies mal présentées (désordre, illisibilité, exercices commencés en bas de page).
- Calculs remplacés par des approximations numériques sans justification.
- Mauvaise maîtrise des bases :
  - polynômes du second degré (racines, signe, extremum, graphe),
  - équations bicarrées.
- Utilisation de théorèmes hors programme (niveau baccalauréat).
- Étude des limites : factorisations inadaptées, confusion sur les termes dominants, erreurs d'interprétation.
- Raisonnements par récurrence mal structurés (initialisation absente, hérédité mal faite).
- Invocation de théorèmes sans hypothèses vérifiées (ex. valeurs intermédiaires, limite monotone).
- Raisonnements circulaires ou faux (« si $f(0) > f(1)$ alors f est décroissante »).
- Suites et fonctions : confusion entre définitions implicites et explicites.
- Non-prise en compte de cas particuliers ;
- Exercices de probabilités souvent négligés, pourtant accessibles.
- Calculs lourds privilégiés au lieu de méthodes simples (ex. matrices : oubli du théorème spectral).
- Résultats arrondis ou incomplets (N=30 au lieu de N≥31).
- Erreurs fréquentes en dérivation et factorisation.

Recommandations

- Soigner la présentation : un exercice par page, copie lisible.
- Maîtriser parfaitement les bases : second degré, factorisations, fonctions usuelles.
- Citer et vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés.
- Structurer les preuves par récurrence correctement (hypothèse, initialisation, hérédité, conclusion).
- Justifier clairement les résultats (ne pas seulement aligner des calculs).
- Traiter aussi les probabilités et exercices concrets (modélisation économique).
- Utiliser les méthodes les plus efficaces, pas les calculs lourds.
- Vérifier systématiquement les cas particuliers et la cohérence des résultats.

Ordre général

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : un mauvais choix du sujet (lire tous les sujets et les analyser est un atout) ; les fautes exagérées (orthographes et grammaires) ; les ratures à outrance, un listing d'idées sans justifications, ni exemples pertinents ; et une conclusion bâclée.

Erreurs fréquentes :

- Copies trop longues, mal structurées, digressives → hors sujet fréquent.
- Plans annoncés qui ne répondent pas à la question ;

- Plans « à tiroirs » (énumération d'idées sans discussion) ;
- Introduction paraphrasant ou recopiant le sujet ;
- Conclusions négligées (répétitions ou trop brèves) ;
- Citations plaquées, fausses ou mal attribuées ;
- Vocabulaire familier ou expressions grossières (« arnaque », « aller au boulot ») ;
- Fautes d'orthographe, de syntaxe, de ponctuation (phrases trop longues avec point-virgule) ;
- Confusions géographiques ou historiques (ex. Moyen-Orient confondu avec Proche-Orient).

Recommandations

- Construire un plan solide au brouillon, qui répond à la problématique.
- Respecter la structure intro – développement – conclusion.
- Employer un vocabulaire soutenu, précis.
- Aérer la copie, soigner la lisibilité.
- Éviter la paraphrase et les citations gratuites.
- Rester centré sur le sujet (éviter les hors sujets et extrapolations abusives).
- Illustrer avec des exemples précis et pertinents.

Contraction de texte

De manière sommaire, voici généralement quelques observations sur les copies : inclure dans votre texte multiples illustrations de l'auteur ; comptage de mots erroné ; un niveau de langue bas et des copies très touffues et sales.

Erreurs fréquentes

- Résumés transformés en analyses partielles (seulement début ou fin du texte) ;
- Omission de données chiffrées, pourtant essentielles ;
- Nombre de mots : oublié, faux ou volontairement manipulé ;
- Résumés trop longs ou trop courts ;
- Énumération d'idées sans enchaînement logique ;
- Développements excessifs sur un exemple secondaire ;
- Orthographe défaillante (y compris sur des mots donnés dans le texte) ;
- Mots écrits phonétiquement (« tôt de natalité », « Plutard »).
- Vocabulaire familier (« les gosses », « en gros »).
- Phrases trop longues, mal ponctuées, avec contresens.

Recommandations

- Respecter strictement la consigne : contraction fidèle de tout le texte ;

- Conserver au moins deux données chiffrées ;
- Toujours indiquer le nombre exact de mots ;
- Rechercher clarté, concision, enchaînements logiques ;
- Employer un vocabulaire correct et un registre soutenu ;
- Relire attentivement pour éviter fautes et maladresses.

Méthodologie d'ordre général

La dissertation est un exercice argumentatif et structuré qui consiste à répondre, de manière organisée et problématisée, à une question de culture générale. Elle ne demande pas seulement de réciter des connaissances, mais d'analyser une problématique en mobilisant : des idées claires, des références culturelles solides (historiques, philosophiques, littéraires, scientifiques…), un raisonnement logique et nuancé.

Elle vise à tester :

- La capacité d'analyse : comprendre les enjeux du sujet ;
- La capacité de réflexion : construire un raisonnement rigoureux ;
- La capacité de culture : illustrer par des exemples pertinents ;
- La qualité d'expression : clarté, style soutenu, orthographe correcte.

Les différentes parties de la dissertation

i. L'introduction

C'est une étape cruciale : elle doit capter l'attention et poser le cadre de réflexion. Elle comprend quatre mouvements obligatoires :

- **Amorce (accroche)** : entrée en matière générale qui suscite l'intérêt. Exemple de sujet « La technique libère-t-elle l'homme ? »

« *L'homme n'a cessé de développer des outils et des techniques afin de mieux s'adapter à son environnement. De la pierre taillée de la préhistoire à la révolution industrielle, puis à l'ère du numérique et de l'intelligence artificielle, la technique a profondément transformé les conditions de vie. Elle semble avoir toujours été au service d'un idéal : se libérer des contraintes naturelles, de l'effort physique, du temps ou de l'espace. Pourtant, dans nos sociétés contemporaines, cette même technique suscite des interrogations nouvelles : dépendance aux machines, risques environnementaux, ou encore perte d'autonomie individuelle. Dès lors, se pose la question de savoir si la technique libère véritablement l'homme ou si elle ne crée pas d'autres formes de servitude.* »

- **Définition des termes** : préciser le sens exact des notions du sujet.

  « Technique » : ensemble des moyens élaborés par l'homme pour agir sur la nature.

  « Libérer » : donner plus d'autonomie, réduire les contraintes.

- **Problématisation** : transformer le sujet en question centrale à résoudre. On peut la reformuler comme suit : « La technique est-elle réellement une libération pour l'homme, ou crée-t-elle de nouvelles formes d'asservissement ? »

- **Annonce du plan** : présentation claire des étapes de la réflexion.

« Nous verrons d'abord en quoi la technique libère l'homme, avant d'examiner les limites de cette libération, puis nous proposerons une synthèse nuancée. »

ii. Le développement

Il est organisé en parties (grandes thèses) et sous-parties (arguments et exemples). On distingue deux grands types de plans selon la nature du sujet.

Chaque partie doit contenir :

Une idée directrice (thèse ou argument majeur).

Des sous-arguments (explications précises).

Des exemples pertinents (historiques, philosophiques, actuels, littéraires).

Une mini-conclusion partielle (bilan de l'argument avant de passer à l'autre partie).

Exemple de sujet : « L'art doit-il être utile ? »

Partie I : L'art est utile car il a une fonction sociale

Idée 1 : Il exprime des valeurs et des idéaux communs (exemple : peinture de Delacroix « La liberté guidant le peuple »).

Idée 2 : Il éduque et transmet (exemple : théâtre de Molière, critique des travers humains).

Partie II : L'art n'a pas besoin nécessairement d'être utile

Idée 1 : L'art est d'abord une création gratuite (exemple : art abstrait de Kandinsky).

Idée 2 : L'art est une fin en soi : « l'art pour l'art » (thèse de Théophile Gautier).

Partie III : Une synthèse nuancée

Idée 1 : L'art peut être à la fois gratuit et porteur de sens.

Idée 2 : Dans nos sociétés modernes, l'art est multiple : il émeut, il instruit, il questionne.

iii. La conclusion

Elle doit être brève et forte. Elle comporte deux étapes :

- **Bilan de la réflexion** : rappeler la réponse à la problématique.

« L'art n'a pas à être utile au sens pratique du terme, mais il possède néanmoins une fonction sociale et humaine essentielle. »

- **Ouverture** : élargir vers une perspective plus large.

  « L'art interroge finalement notre rapport à la beauté et à la vérité, au-delà de toute utilité immédiate. »

Les transitions

Les transitions sont indispensables pour montrer la logique du raisonnement. Elles doivent :

- rappeler ce qui vient d'être dit,
- annoncer ce qui va suivre.

Exemple : « Si la technique semble avoir libéré l'homme de nombreuses contraintes matérielles, elle peut aussi engendrer de nouvelles formes de dépendance. Il convient donc d'examiner maintenant les limites de cette libération. »

Les types de sujets et de plans

- **Sujet analytique (on analyse un problème sans nécessairement opposer des thèses)**

  Exemple : « Qu'est-ce que le bonheur ? ». Une proposition de plan :

  Partie 1 : Les différentes conceptions du bonheur.

  Partie 2 : Les conditions d'accès au bonheur.

  Partie 3 : Les limites d'une définition universelle du bonheur.

- **Sujet dialectique (thèse / antithèse / synthèse)**

  Exemple : « La technique libère-t-elle l'homme ? »

  Partie 1 : Oui, la technique libère (exemples historiques : médecine, transports).

  Partie 2 : Pas toujours, elle aliène aussi l'homme (dépendance aux machines, pollution).

  Partie 3 : Elle libère et aliène : tout dépend de l'usage (dimension éthique et politique).

Conseil : La plupart des sujets de culture générale sont **dialectiques**, car ils appellent une discussion nuancée.

Exemples pratiques - sujet : « L'homme est-il maître de la nature ? »

- « Dès le XVIIe siècle, Descartes affirmait que l'homme devait devenir "maître et possesseur de la nature". Mais les crises écologiques contemporaines semblent remettre en cause cette ambition. » (***Amorce du sujet***).

- « Peut-on encore dire que l'homme maîtrise la nature, ou au contraire doit-il reconnaître ses limites face à elle ? » (***Problématique***).

- « Nous montrerons d'abord que l'homme a longtemps affirmé sa maîtrise de la nature, avant de voir comment cette prétention est aujourd'hui mise en question, pour enfin proposer une réflexion sur la possibilité d'un rapport plus équilibré. » (***Annonce du plan***).

- « Après avoir souligné les bienfaits de la technique pour l'humanité, il convient désormais de considérer ses effets pervers. » (***Une transition***).

- « L'homme ne peut être totalement maître de la nature sans se condamner lui-même. L'enjeu aujourd'hui est moins de dominer la nature que de coopérer avec elle. Cela interroge finalement notre conception du progrès. » (***Conclusion et ouverture***).

Réussir sa synthèse dans un sujet de type dialectique

La synthèse n'est pas un résumé mécanique des parties, mais une réponse nuancée à la problématique qui dépasse l'opposition thèse/antithèse. Elle permet de formuler une vision plus large, plus équilibrée, parfois plus originale.

- ✓ **La synthèse doit directement répondre à la question posée.**
- ✓ **Exemple sur le sujet : *La technique libère-t-elle l'homme ?***

« La technique libère l'homme de nombreuses contraintes matérielles, mais elle peut l'asservir lorsqu'il en devient dépendant. »

- **Trouver un point de vue plus élevé qui réconcilie ou reformule autrement le problème.**

- **Exemple (Sujet : *L'art doit-il être utile ?*) :**

« L'art peut sembler inutile par nature, mais cette inutilité apparente est précisément ce qui fait sa valeur et son utilité profonde : il nourrit la sensibilité et la pensée. »

Exemple de démarche (Sujet : *La technique libère-t-elle l'homme ?*)

- ✓ **Thèse (I) : Oui, la technique libère → elle réduit les efforts, soigne, transporte, connecte.**

- ✓ **Antithèse (II) : Non, elle aliène → dépendance, pollution, robotisation.**

- ✓ **Synthèse (III) :**

« La technique n'est ni pure libération ni simple asservissement : elle est un outil dont les effets dépendent de l'usage que l'homme en fait et des choix de société qui l'accompagnent. »

Astuces pratiques :

- Utilise souvent des formulations équilibrées :

  - « Elle libère autant qu'elle contraint. »
  - « Elle n'est pas en elle-même… mais selon l'usage qu'on en fait. »

- N'introduis pas d'idées nouvelles non traitées dans le développement.
- La synthèse doit préparer naturellement la conclusion finale.

Méthodologie d'économie

Définition de l'exercice

La dissertation économique est un exercice d'argumentation structurée qui vise à :

- Analyser un problème économique posé par le sujet ;
- Construire une réflexion logique et organisée (introduction, développement, conclusion) ;
- Mobiliser des connaissances économiques solides (théories, concepts, auteurs) ;
- Illustrer par des exemples chiffrés et concrets, en particulier ceux liés au contexte étudié (Afrique, pays en développement).

Elle évalue :

- La compréhension du sujet et la capacité à problématiser ;
- La culture économique (théories + faits économiques) ;
- La capacité à argumenter et nuancer ;
- La qualité rédactionnelle et la rigueur.

Les différentes parties de la dissertation

- **L'introduction**

L'introduction doit comporter 4 étapes :

- Amorce (accroche) : phrase générale qui introduit le thème.

Exemple de sujet : *La croissance économique favorise-t-elle l'emploi en Afrique ?*

« Depuis deux décennies, plusieurs pays africains affichent parmi les taux de croissance les plus élevés du monde, comme l'Éthiopie (8,5 % entre 2000 et 2019) ou la Côte d'Ivoire (7,4 % entre 2012 et 2019). Pourtant, cette croissance n'a pas toujours entraîné une amélioration significative de l'emploi. »

- Définition des termes et précision du cadre : clarifier les notions.

  Croissance économique = augmentation durable de la production de biens et services mesurée par le PIB réel.

  Emploi = ensemble des personnes occupant une activité rémunérée.

- Problématisation : transformer le sujet en question centrale.

  « *La croissance suffit-elle à réduire le chômage en Afrique ou faut-il des politiques complémentaires pour qu'elle soit inclusive ?* »

- Annonce du plan : présentation des axes.

  « *Nous montrerons d'abord que la croissance peut stimuler l'emploi, avant de souligner ses limites, puis nous envisagerons les conditions d'une croissance réellement inclusive en Afrique.* »

- **Le développement**

Le développement est structuré en parties (I, II, III) et sous-parties (A, B, C).

Exemple de sujet : *La croissance économique favorise-t-elle l'emploi en Afrique ?*

I. La croissance peut stimuler l'emploi

A. Création d'emplois dans les secteurs porteurs (infrastructures, BTP).

Exple : au Nigéria, le secteur des services représente 56 % du PIB et génère des millions d'emplois.

B. Développement du secteur formel grâce aux IDE.

Exple : les investissements chinois en Afrique subsaharienne (60 milliards $ promis au FOCAC 2018) favorisent la construction d'usines et d'infrastructures.

C. Théories économiques : croissance = demande de travail (loi d'Okun).

II. Mais cette croissance reste insuffisante pour absorber le chômage

A. Une croissance souvent non inclusive.

Exple : croissance du PIB en Afrique subsaharienne ~3,2 % en 2023 (Banque mondiale), mais taux de chômage des jeunes = 13 % (OIT).

B. Poids du secteur informel (≈ 80 % de l'emploi total en Afrique, selon BAD).

C. Inadéquation entre formation et marché du travail (faible employabilité des diplômés).

III. Vers une croissance inclusive et créatrice d'emplois

A. Investir dans le capital humain (éducation, formation technique).

Exple : Rwanda, politique de formation TIC → secteur numérique = 8 % du PIB en 2022.

B. Diversifier l'économie (sortir de la dépendance aux matières premières).

Exple : Botswana a utilisé les revenus du diamant pour investir dans l'éducation et réduire la pauvreté.

C. Mettre en place des politiques actives d'emploi.

Exple : programmes « emplois jeunes » en Côte d'Ivoire (plus de 150 000 jeunes insérés entre 2015 et 2020).

- **La conclusion**

La conclusion a 2 étapes :

- Bilan : répondre clairement à la problématique.

  « La croissance économique en Afrique favorise certes la création d'emplois, mais elle reste trop peu inclusive pour absorber le chômage, surtout des jeunes. »

- Ouverture : élargir vers une perspective plus large.

  « L'enjeu n'est donc pas seulement de croître, mais de transformer cette croissance en développement durable et inclusif. Cela interroge aussi la transition démographique et les politiques industrielles en Afrique. »

Les types de sujets en dissertation économique

- Sujets de type analytique (explication d'un phénomène)

  Exemple : *Quelles sont les causes du chômage des jeunes en Afrique ?*

I. Facteurs structurels (démographie, informel, inadéquation formation/emploi).

II. Facteurs conjoncturels (ralentissement de la croissance, crises).

III. Politiques nécessaires pour réduire ce chômage.

- Sujets de type dialectique (discussion thèse/antithèse/synthèse)

  Exemple : *La croissance suffit-elle à réduire la pauvreté en Afrique ?*

I. Oui, la croissance est un moteur essentiel (réduction de la pauvreté au Ghana, au Maroc).

II. Pas seulement, croissance sans redistribution entretient les inégalités (Afrique du Sud : 63 % d'inégalités de revenu selon Gini).

III. La croissance doit s'accompagner de politiques sociales et d'inclusion pour réduire durablement la pauvreté.

Les transitions

Les transitions permettent de lier les parties logiquement.

Exemple : « *Si la croissance apparaît comme un facteur de création d'emplois, force est de constater qu'en Afrique, elle n'a pas encore permis de résorber le chômage de masse. Il convient donc d'examiner ses limites.* »

Exemples pratiques : introduction et conclusion

Exemple d'amorce (Sujet : *La croissance économique favorise-t-elle l'emploi en Afrique ?*)

« En 2023, l'Afrique subsaharienne a affiché une croissance moyenne de 3,2 % (Banque mondiale), supérieure à celle de nombreuses économies développées. Pourtant, le continent compte encore plus de 20 millions de jeunes sans emploi, selon l'OIT. Ce paradoxe met en lumière la question centrale du lien entre croissance et emploi. »

Exemple de conclusion (même sujet)

« La croissance économique constitue une condition nécessaire mais non suffisante pour favoriser l'emploi en Afrique. Elle doit être accompagnée de politiques ciblées sur la formation, la diversification économique et l'inclusion sociale. Au-delà, c'est la capacité des pays africains à transformer leur dynamisme démographique en dividende économique qui déterminera leur avenir. »

- **MACROECONOMIE : comptabilité nationale, modèles keynésien et classique, modèle IS-LM, économie fermée, économie ouverte, etc.**

- **MICROECONOMIE : Théories du consommateur et du producteur, équilibre général, économie publique et économie industrielle (monopole, oligopoles, concurrence pure et parfaite, concurrence imparfaite, etc.)**

La statistique

La statistique est la science des données. Elle consiste à :

- collecter des informations chiffrées (données),
- organiser et résumer ces données (tableaux, graphiques, indicateurs),
- analyser ces informations à l'aide de méthodes mathématiques,
- interpréter les résultats pour aider à la décision.

Exemple : Enquêter sur 1 000 ménages pour savoir combien ont accès à l'eau potable, puis calculer les pourcentages, faire des graphiques, et tirer des conclusions utiles pour les décideurs.

Elle sert à comprendre la réalité à partir des données et à réduire l'incertitude. Elle permet de :

- Décrire un phénomène (ex. taux de chômage, nombre moyen d'enfants par femme).
- Comparer des situations (ex. comparer le niveau de vie entre deux régions).
- Prévoir des tendances (ex. évolution du prix du pétrole).
- Prendre des décisions éclairées (ex. définir une politique publique, lancer un produit sur le marché).

Elle est partout, car toutes les disciplines ont besoin de données :

- Économie et finances : analyse du PIB, inflation, taux de chômage, risques financiers.
- Santé : suivi des épidémies, efficacité d'un vaccin (essais cliniques) ;
- Éducation : taux de réussite aux examens, nombre d'élèves par classe ;
- Sociologie et démographie : enquêtes sur la pauvreté, migrations, structure de la population ;
- Environnement : climat, pollution, gestion des ressources naturelles ;
- Industrie et commerce : sondages de marché, contrôle de qualité, optimisation de la production ;
- Politique : sondages électoraux, évaluation des politiques publiques.

Exemple : L'Institut National de la Statistique (INS) du Cameroun publie des données régulières sur la croissance, l'emploi, la pauvreté. Ces chiffres sont utilisés par le gouvernement, les entreprises et les chercheurs.

La statistique est-elle importante :

- Parce que le monde moderne produit une immense quantité de données : sans statistique, impossible de les comprendre.
- Parce qu'elle permet de transformer des chiffres bruts en informations utiles.
- Parce qu'elle aide à anticiper et à planifier (ex. prévoir la population d'un pays en 2050 pour planifier les écoles et hôpitaux).
- Parce qu'elle constitue un outil objectif d'aide à la décision, contrairement aux simples opinions.

La statistique joue un rôle central dans presque tous les domaines que tu as cités, car elle permet d'analyser les données, de prendre des décisions éclairées et de prévoir l'avenir. Voici une explication détaillée domaine par domaine :

Éducation

- Mesure des performances scolaires des élèves (examens, taux de réussite, abandon) ;
- Évaluation de l'efficacité des politiques éducatives ;
- Prévisions des besoins en enseignants, infrastructures, manuels ;
- Classements d'universités et comparaisons internationales (comme PISA).

Santé

- Suivi de l'évolution des maladies (épidémiologie, Covid-19, paludisme, VIH) ;
- Évaluation de l'efficacité des traitements médicaux (essais cliniques) ;
- Statistiques hospitalières : taux de mortalité, durée moyenne d'hospitalisation ;
- Prévision des besoins en infrastructures sanitaires et en médicaments.

Finance

- Analyse des risques de placement et d'investissement ;
- Prévision des tendances boursières ;
- Gestion des portefeuilles financiers et évaluation des performances ;
- Modélisation des taux d'intérêt et des fluctuations monétaires.

Économie

- ✓ Calcul des agrégats (PIB, inflation, chômage, balance commerciale) ;
- ✓ Suivi des politiques économiques et de leur efficacité ;
- ✓ Prévisions macroéconomiques ;
- ✓ Comparaisons internationales du développement.

Démographie

- Mesure de la population (recensements, enquêtes) ;
- Études sur la fécondité, mortalité, migrations ;
- Prévisions démographiques utiles à la planification (santé, écoles, emploi) ;
- Analyse des structures par âge, sexe, zones urbaines/rurales.

Banque et assurances

- ✓ Évaluation des risques de crédit (probabilité de défaut) ;
- ✓ Fixation des primes d'assurance (assurance vie, automobile, santé) ;
- ✓ Détection de fraudes bancaires ;
- ✓ Analyse de la rentabilité et satisfaction client.

Sociologie

- Études d'opinion et de comportements sociaux ;
- Analyse des inégalités sociales ;

- Mesure de l'impact des politiques sociales ;
- Études sur la pauvreté, les conditions de vie, la criminalité.

Psychologie

- Expérimentations pour comprendre les comportements humains ;
- Études statistiques sur la mémoire, la motivation, les émotions ;
- Évaluation des tests psychométriques ;
- Prévision des réactions humaines face à des situations données.

Anthropologie

- Analyse des populations anciennes (restes osseux, ADN) ;
- Études de la diversité culturelle et linguistique ;
- Modélisation des dynamiques de groupes ;
- Mesure de l'évolution des pratiques et coutumes.

Compagnies de téléphonie mobile

- ✓ Analyse du trafic d'appels, SMS et Internet ;
- ✓ Étude du comportement des abonnés (prépayé vs postpayé) ;
- ✓ Détection des fraudes téléphoniques ;
- ✓ Optimisation des réseaux (zones blanches, congestion).

Aviation civile

- Études de sécurité aérienne (accidents, incidents) ;
- Prévisions du trafic passagers et fret ;
- Optimisation des horaires et itinéraires de vol ;
- Mesure de la performance des compagnies aériennes.

Sport

- Analyse de la performance des athlètes (statistiques de match, vitesse, endurance) ;
- Prévisions de résultats (big data et paris sportifs) ;
- Optimisation de la préparation physique ;
- Études d'audience des événements sportifs.

Politique

- Sondages électoraux ;
- Mesure de la popularité des dirigeants ;
- Évaluation des politiques publiques ;
- Analyse des comportements électoraux.

Météorologie

- ✓ Prévisions du temps : les modèles statistiques et probabilistes (régressions, séries chronologiques, modèles ARIMA) permettent de prédire la pluie, la température, la vitesse du vent, etc. ;

- ✓ Études climatiques : suivi des tendances à long terme (réchauffement global, élévation du niveau des mers) ;
- ✓ Alerte précoce : prédictions de phénomènes extrêmes (cyclones, sécheresses, inondations) pour sauver des vies ;
- ✓ Analyse de données massives : traitement d'énormes volumes de données provenant de satellites, radars, stations météo ;
- ✓ Impact socio-économique : les prévisions météo guident l'agriculture, le transport aérien, maritime et terrestre.

Intelligence artificielle (IA)

- Apprentissage automatique (machine learning) : les algorithmes (régression logistique, arbres de décision, réseaux de neurones) sont tous basés sur la statistique ;
- Reconnaissance d'images et de voix : calcul de probabilités pour classer ou identifier correctement un objet ou une parole ;
- Traitement du langage naturel : utilisation de modèles statistiques pour comprendre, prédire et générer du texte ;
- Big Data et Data Science : analyse statistique de données massives pour trouver des corrélations et faire des prédictions ;
- Évaluation et optimisation des modèles : statistiques utilisées pour mesurer les performances (précision, rappel, F1-score) et éviter le sur-apprentissage (overfitting).

Astronomie & exploration spatiale

- ➢ Observation astronomique : analyse des données massives issues de télescopes terrestres et spatiaux (Hubble, James Webb) ;
- ➢ Détection d'exoplanètes : utilisation de modèles statistiques pour confirmer la présence d'une planète autour d'une étoile (méthode des transits, vitesses radiales) ;
- ➢ Astrophysique : estimation de la masse des étoiles, des galaxies, de la matière noire.
- ➢ Sécurité spatiale : calculs de probabilité de collision entre satellites, débris spatiaux et engins spatiaux ;
- ➢ Exploration spatiale : planification et modélisation des trajectoires de fusées et sondes interplanétaires (mécanique orbitale appuyée par statistiques et probabilités) ;
- ➢ Analyse d'images spatiales : traitement statistique des signaux pour réduire le bruit et améliorer la précision des observations.

ILLUSTRATION & QUELQUES ELEMENTS A SAVOIR :

Décideurs : Ministre de la Santé Publique

- Mettre sur pied plusieurs centres sanitaires pour 1000 habitant et ce, dans chaque zone défavorisée ;
- Améliorer la qualité des soins intensifs ainsi que le personnel de santé et donc, de service.

Distribution des moustiquaires imprégnées

- Donner à chaque ménage les moustiquaires imprégnées proportionnelles au nombre d'enfants ;
- Mettre sur pied des campagnes de sensibilisation sur le bien fondé de dormir sous une moustiquaire.

Directeurs/Chefs de services

Mathématiques
Modélisation
Econométrie
Economie

Analyse des données statistiques (Modèles et méthodes statistiques)

Connaissance des concepts théoriques.

Logiciels et langages de programmation : R, PYTHON, EXCEL, STATA, MATLAB, SPAD, SPSS EVIEWS.

Directeurs/Chefs de services

- Au moins 60% des ménages vivent dans les zones défavorisées (absence des hôpitaux et écoles) ;
- 65% des individus interrogés affirment n'avoir pas été consulté par un médecin depuis 3 ans au plus ;
- Les enfants dorment à l'air libre, sans aucune protection.

Statisticien

- Par exemple, 57% des ménages vivent près des poubelles (dépôts) avec au moins 3 enfants. ;
- 45% des parents sont non scolarisés (ce qui peut signifier la négligence de certaines pratiques) ;
- Il y a 9 chances sur 10 d'être piqué par au moins 5 moustiques lorsqu'un enfant dort ;
- 75% des ménages n'a pas accès à de l'eau potable.

Constitution et apurement de la base de données

Traitement des cas de non réponses et des données atypiques

Collecte des données

Déterminants du paludisme

Par exemple, on peut avoir les variables suivantes : l'âge de la mère, nombre d'enfants dans le ménage, l'âge des enfants, niveau d'instruction de la mère, modèle de la maison (en paille par exemple), existence d'une rivière ou d'une poubelle proche de la maison, consultation à une formation sanitaire, cas de maladies etc.

Superviseur

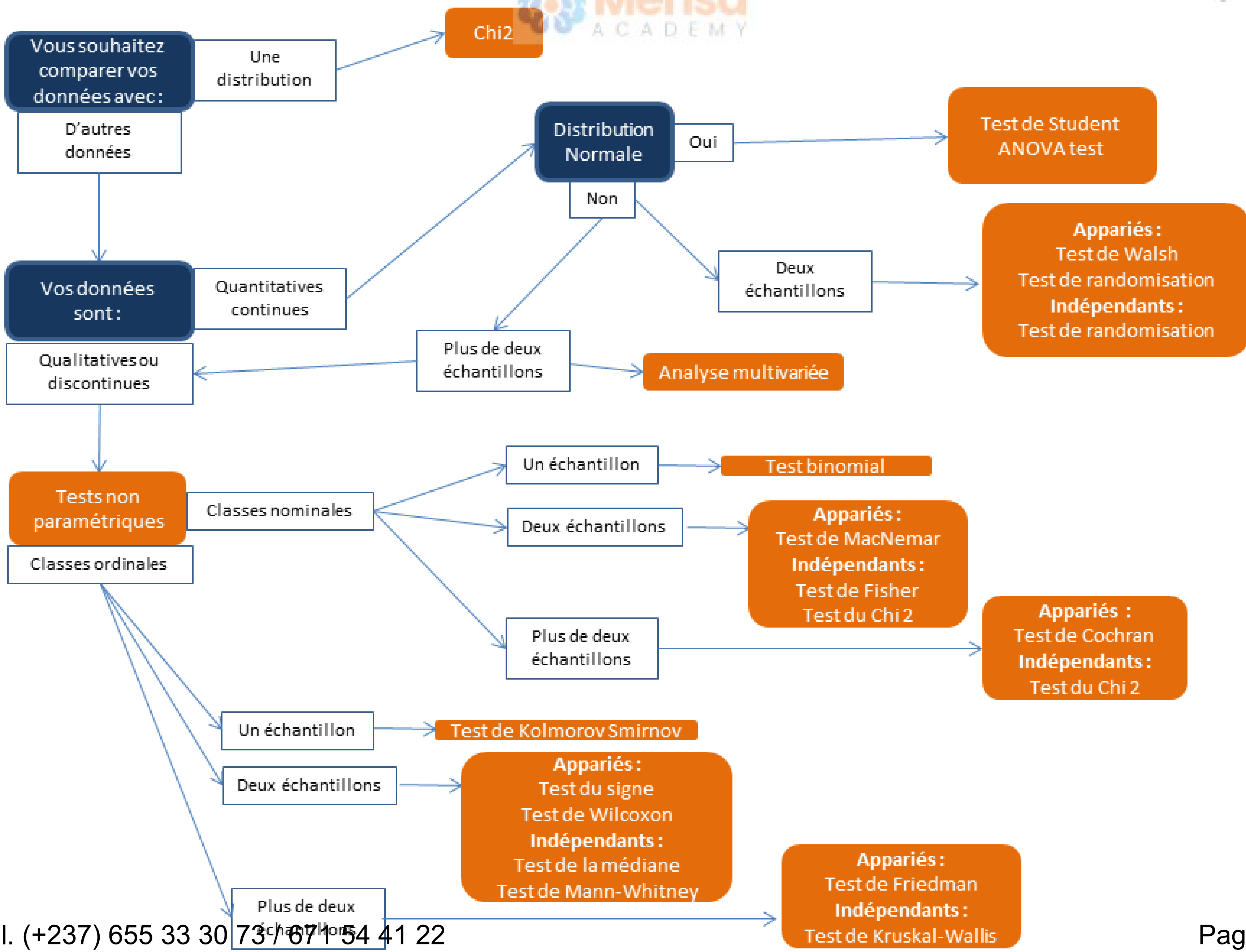
Coordonnateur

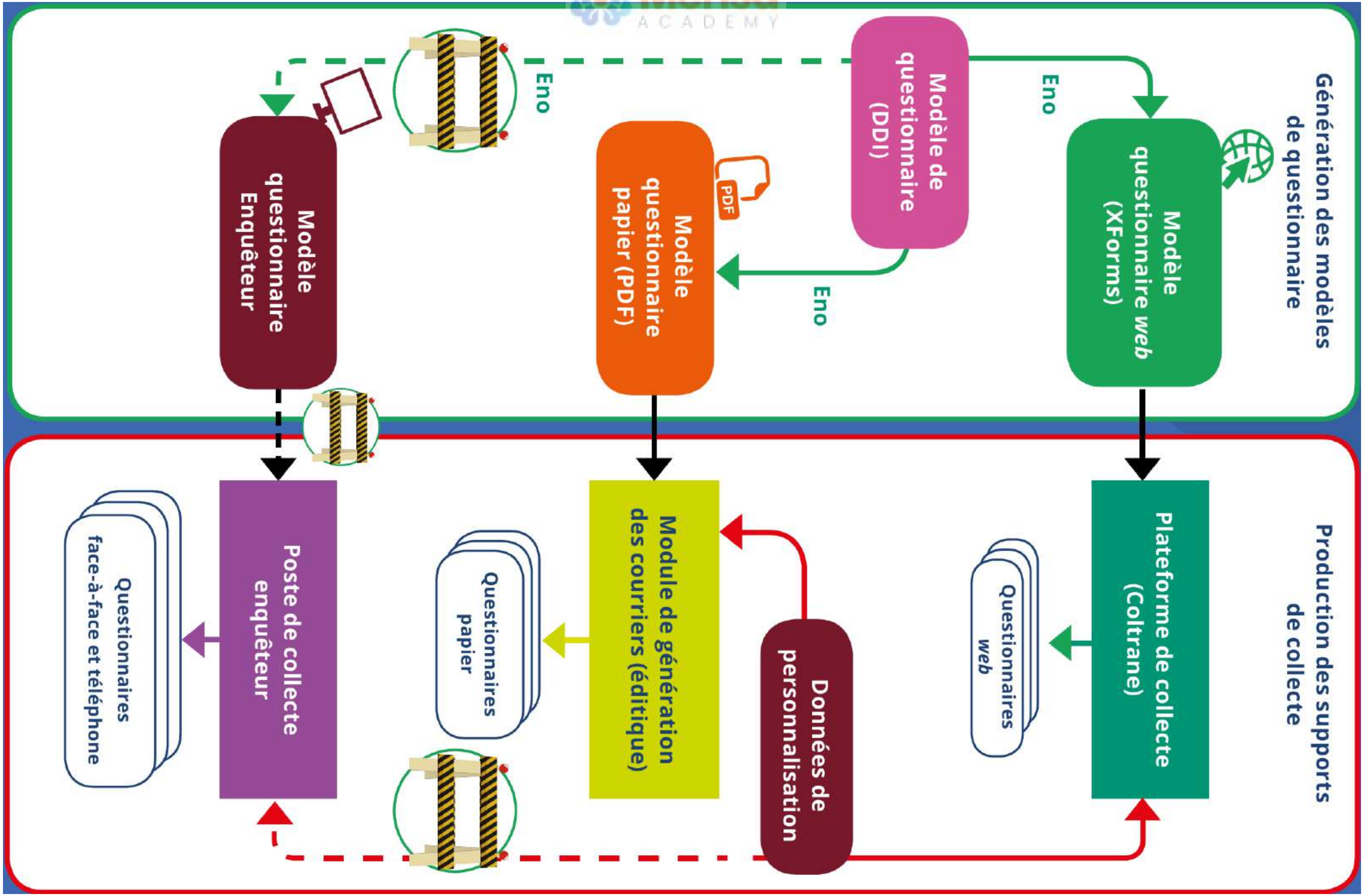
Agents de terrain

Questionnaire de saisie d'un agent enquêteur, numérisation du questionnaire et administration.

- Zones d'enquête (Régions, villes, villages, départements, districts etc.) ;
- A qui s'adresse le questionnaire ? Les enfants ? Les femmes ? L'ensemble du ménage ?

Analyses Univariées




Génération des modèles de questionnaire
Modèle de questionnaire (DDI)
Eno
Eno
Eno
Modèle questionnaire web (XForms)
Modèle questionnaire papier (PDF)
PDF
Modèle questionnaire Enquêteur
Production des supports de collecte
Plateforme de collecte (Coltrane)
Questionnaires web
Module de génération des courriers (éditique)
Questionnaires papier
Données de personnalisation
Poste de collecte enquêteur
Questionnaires face-à-face et téléphone

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix

SUJET N° 1

Comparez l'enquête policière et l'expérience scientifique.

SUJET N° 2

Que signifie et quelle valeur faut-il donner à l'expression : «L'histoire jugera» ?

SUJET N° 3

Le philosophe ALAIN affirme que «la plus haute valeur humaine, c'est l'esprit libre». (Les vigiles de l'Esprit).

Vous commenterez cette affirmation et ferez apparaître les difficultés qui peuvent surgir dans cette conquête.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Note : l'épreuve est composée de cinq exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

EXERCICE n° 1

On suppose que la quantité demandée y d'un produit est une fonction du prix x, de la forme :

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$$

❶ Déterminer les réels a,b,c pour que les quantités demandées pour les prix de 1, 2 et 5 unités de prix soient respectivement de 20, 12 et 4 unités de quantités.

❷ Etudier la fonction f sur $\mathbf{R}^+$ et tracer son graphe (C) dans un repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$). Dans quel intervalle peut varier x ?

❸ La fonction d'offre du produit est définie par la fonction g :

$$g(x) = 6\ln(x+1) + \frac{8}{x+4} - 2$$ (ln désigne la fonction logarithme népérien)

Tracer son graphe (C') dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$). Déterminer graphiquement le prix x et la quantité y correspondant à l'état d'équilibre de l'offre et de la demande.

❹ Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{11} (g(x) - f(x))dx$$

EXERCICE n° 2

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad et \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

❶ Calculer I_0 et J_0.

❷ Soit n un entier naturel non nul

① En intégrant par parties I_n, puis J_n, montrer que I_n et J_n vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

② En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

❸ Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \quad et \quad \lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

EXERCICE n° 3

MERPLUS est l'un des meilleurs parcs de loisirs du pays, la tarification est la suivante : forfait annuel à 1000 francs, forfait journée à 60 francs, forfait demi-journée à 45 francs. Le coût d'établissement du forfait annuel s'élève à 10 francs et celui des forfaits quotidiens à 1 franc dans chacun des cas.

Le directeur du parc a remarqué qu'avec une fréquentation moyenne de « 20 jours pleins » par an, une part relativement importante de la clientèle n'opte pas pour le forfait annuel. Il se demande si le tarif pratiqué n'est pas proportionnellement élevé par rapport aux forfaits quotidiens. Pour en avoir le coeur net, il fait procéder à une étude qui révèle que le temps qu'il fait en début de matinée joue un rôle important sur l'activité retenue par le client qui n'a pas opté pour le forfait annuel (dénommé « client » dans la suite de l'exercice).

En admettant qu'il y a en moyenne 70% de chances pour que le temps puisse être considéré comme beau en début de matinée, les conséquences climatiques sont les suivantes :

- si, pour le client, il fait beau :
  . il y a 90% de chances qu'il achète un forfait journée ;
  . et 10% qu'il se contente d'un forfait demi-journée ;
- si, pour le client, il fait mauvais temps :
  . il y a 30% de chances qu'il achète un forfait journée ;
  . et 50% qu'il se contente d'un forfait demi-journée ;
  . et il reste 20% de chances qu'il n'achète rien.

❶ Calculer la probabilité que, pour un jour quelconque, un client achète un forfait journée, ainsi que celle pour qu'il achète un forfait demi-journée.

❷ En justifiant votre réponse, indiquer si le client a financièrement raison de ne pas opter pour le forfait annuel.

EXERCICE n° 4

Pour tout entier $n \geq 0$, v_n est le nombre réel défini par l'équation : $\ln(10^n v_n) = \frac{n}{2}$
($\ln$ désigne le logarithme népérien)

❶ Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont vous préciserez la raison et le premier terme.

❷ Soit (P_n) la suite définie par $P_0=v_0$ et $P_n=v_nP_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$

① Calculer P_1 et P_2.

② Démontrer que $P_n = \left(\frac{\sqrt{e}}{10}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ pour tout n.

③ Déterminer l'ensemble E des entiers n tels que $P_n \leq 10^{-6}$

EXERCICE n° 5

Calculer $\lim_{x\to 0^+} h(x)\, où\, h(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{e^x-1} - \ln\frac{e^x-1}{x}$ en utilisant les développements limités

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

Les candidats traiteront l'un des deux sujets au choix.

SUJET N° 1

Les pays en voie de développement ont engagé depuis les années 80 des politiques d'ajustement qui impliquent souvent une discipline budgétaire stricte. Vous en analyserez les motivations et les implications pour les économies de ces pays.

SUJET N° 2

On considère une ville comme cadre de notre étude. La monnaie en vigueur est le Franc noté F.

Les Parties I à IV sont indépendantes entre elles.

❶ L'étude de l'équilibre du producteur

A l'intérieur de la ville, trois producteurs automobiles coexistent. Pour produire des voitures, chacun d'entre eux utilise du travail et du capital en quantités différentes. Ainsi, pour 10 voitures, la combinaison productive s'établit comme suit :

	Entreprise 1	Entreprise 2	Entreprise 3
Heures de main d'oeuvre	80	50	10
Capital	2	4	10

La production se fait à rendements constants et la proportion travail-capital utilisés ne varie pas avec la quantité produite.

① Représenter graphiquement les différents procédés de fabrication et repérer sur chacun d'eux les couples L (heures de main d'oeuvre) et K (capital) correspondant à un niveau de production de 20 automobiles.

② L'heure de travail coute 40 F et le prix d'une unité de capital est de 400 F. Quelle entreprise est la plus efficace ? Combien devrai-je alors payer si je désire acheter 5 automobiles et que l'entreprise ne réalise aucun profit ?

③ Le prix de l'heure de travail passe à 100 F ; le prix de l'unité de capital reste égal à 400 F. Quelle entreprise est alors la plus efficace ? Combien pourrai-je acheter d'automobiles si je dispose de 3500 F ?

④ Chaque entreprise dispose de 200 heures de main d'oeuvre et de 30 unités de capital. Donnez pour chacune d'entre elles sa production maximale et indiquez si elle est efficace.

⑤ Suite à une décision administrative, les entreprises 2 et 3 sont fermées. L'heure de travail coute 40 F et le prix d'une unité de capital est de 400 F. La demande de voitures est de la forme

$$Q = 5000 - P$$

où Q est le nombre de voitures vendues et P leur prix unitaire. Combien l'entreprise doit elle vendre de voitures, à quel prix ? Quel est alors son profit ? Rappelez briévement les différences principales entre une situation de concurrence parfaite et une situation de monopole.

❷ L'étude de l'équilibre du consommateur

Les habitants de la ville qui ne possèdent pas de voiture peuvent en louer une auprés de deux vendeurs : Superauto où les voitures sont proposées à 20 F par jour et Autooccase où elles coûtent 15 F.

① La fonction d'utilité des habitants est de la forme

$$U = f(X,Y) = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{3}}$$

où X est le nombre de jours de location d'une automobile Superauto et Y celui de location chez Autooccase. Quels enseignements peut on tirer de cette fonction ?

② Avec un budget véhicules de 4000 F, comment un habitant répartira-t'il de manière optimale sa fréquentation entre les deux concessionnaires ?Donnez le nombre de jours de location dans chacun d'entre eux ?

③ Le prix de la journée de location d'une voiture chez Superauto passe à 30 F et celui chez Autooccase à 10 F. Les habitants sont-ils plus ou moins satisfaits qu'auparavant ?

❸ L'étude des marchés

Tous les loueurs de garages ont la même structure de coût exprimée par la relation de coût total suivante

$$C_T = 5q_i^2 + 5q_i + 180$$

où q_i est le nombre de places de garages louées par le producteur i. 180 correspond au versement global effectué par l'ensemble de la profession à la ville.

① Expliquez les deux notions d'équilibre de court-terme et équilibre de long-terme.

② Sous l'effet de la concurrence, supposée parfaite, quel sera le prix d'équilibre dans le long-terme ? Quel sera alors le nombre de producteurs si la demande est donnée par D=780/P où P est le prix d'une location ?

❹ L'étude de l'équilibre général

L'offre de voitures est donnée par $S = 100 + 2.10^{-3} p_s$; la demande de voitures par $D = 130 - 10^{-3} p_d$.

où p_s est le prix de production d'une voiture et p_d le prix d'achat.

① Donnez le prix d'équilibre et la quantité de voitures achetées.

② Pour relancer la consommation, la mairie de la ville hésite entre d*épendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent ;*

- le papier millimétré fourni doit être remis avec votre copie.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D’ANALYSE D’UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

PROBLEME N° 1

Le projet consistant à concevoir puis fabriquer et vendre un nouveau modèle automobile peut se décomposer en 3 phases :

1- Etudes de conception des éléments, fabrication des prototypes, essais, études économiques, etc.

2- Mise en place des équipements nécessaires à la fabrication en série

3- Fabrication et vente.

En fin de phase 1, des études économiques sont menées afin de dimensionner correctement les équipements nécessaires à la production en série. Pour prévoir la progression des ventes du futur véhicule, on analyse celles d’un modèle similaire à celui qui est à l’étude; et qui avait été lancé 15 ans auparavant. Elles sont données dans le tableau 1 ci-après. On notera que les installations qui produisaient ce véhicule à l’époque avaient été notoirement surdimensionnées, ce qui avait permis à l’entreprise de répondre à la demande sans aucune contrainte.

Tableau 1

Ventes de l'année modèle au cours du temps

Année t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ventes v_i (en milliers)	20	30	46	65	67,5	62,5	66,5	63	68	65,5	67	64	62,5	55,5	45

❶ ① Tracer sur le papier millimétré joint en annexe l'évolution de ces ventes v en fonction du temps.

② Commenter l'évolution de ces ventes v en fonction du temps.

❷ ① Tracer sur le même papier millimétré la droite d'équation : f(t) = 15100 t + 2500 où t est la variable « année ».

② Calculer le coefficient r défini par la formule suivante : $r^2 = \dfrac{A^2}{BC}$ où $A = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\left[(v_i - \bar{v})(t_i - \bar{t})\right]$; $B = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(v_i - \bar{v})^2$; $C = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(t_i - \bar{t})^2$ (v_i représentant les ventes de l'année t_i).

Pour le calcul, on donne également les informations suivantes :

$$\bar{v} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} v_i = 40250 \text{ et } \bar{t} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} t_i = 2,5$$

❸ ① Tracer sur le même papier millimétré la courbe définie par l'équation

$$g(t) = 13591 * (1,486)^t.$$

② Si l'on suppose que les ventes du futur modèle s'adapte parfaitement à la courbe tracée précédemment, donner une estimation de progression annuelle des ventes (ce résultat sera donné en pourcentage).

❹ En justifiant votre démarche, pour les années 1,2,3 et 4, à laquelle des fonctions f ou g le modèle de référence est-il le plus « proche » ?

PROBLEME N° 2

A l'aide du tableau 2 fourni en annexe, rédiger une note de synthèse sur les salaires dans les régions françaises et dans les départements.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

❶ Les DADS

Les déclarations annuelles de données sociales (DADS) sont remplies par les entreprises ayant employé au moins un salarié dans l'année et adressées à différentes administrations. Leur champ d'exploitation couvre **l'ensemble des salariés à l'exception des salariés de l'agriculture, des services domestiques, de l'Etat et des collectivités territoriales**. La notion de poste retenue dans la source correspond à un couple salarié-établissement. Le champ retenu ici est celui des postes à temps complet (la durée de travail est supérieure ou égale à 80 % de la durée conventionnelle), permanents ou non. Les salaires pris en compte sont les salaires nets annuels, y compris les avantages en nature et les primes, mais nets de cotisations sociales et de contribution sociale généralisée. Pour les salariés n'ayant pas travaillé toute l'année, le salaire est extrapolé à une année-travail, sur la base de 360 jours ; il ne s'agit donc pas de salaires effectivement perçus. Les salaires sont affectés au lieu de travail.

❷ Effet de structure et effet propre

L'effet de structure est défini comme l'écart entre, d'une part le salaire fictif qu'aurait le département si on appliquait à sa structure d'emplois par sexe, catégorie socio-professionnelle et secteur d'activité les salaires moyens nationaux des catégories ainsi déterminées et, d'autre part le salaire moyen de la province. **L'effet propre** représente la part de l'écart entre le salaire moyen départemental et le salaire moyen provincial, non prise en compte par l'effet structurel.

Exemple de calcul de l'effet de structure et de l'effet propre :

Le salaire moyen provincial est de 109 573 F ; le salaire moyen en Ile-de-France est de 149 594 F, donc supérieur de 40 021 F à celui de la province. Le salaire fictif de l'Ile-de-France est de 131 125 F : l'effet de structure est donc de 131 125 - 109 573 = 21 552 F. L'effet propre est alors de 18 470 F, soit 40 021 - 21 552.

❸ Nomenclatures

Les nomenclatures utilisées dans le calcul des effets de structure sont un regroupement en 6 postes pour les catégories socio-professionnelles et en 20 postes pour le secteur d'activité (intermédiaires entre la Nomenclature Economique de Synthèses « NES » en 16 et en 36 postes). Si on choisit un regroupement en 22 postes pour les catégories socio-professionnelles, on obtient des résultats tout à fait comparables. Dans la NES36, **les six secteurs d'activité à plus hauts salaires** sont : « Pharmacie, parfumerie et entretien », « Production de combustibles et carburants », « Eau, gaz, électricité », « Activités financières », « Conseils et assistance » et « Recherche et développement ».

ANNEE 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B - OPTION ECONOMIE

Corrigé de l'épreuve de MATHS

EXERCICE n° 1

1) a = -4 ; b = 44 ; c = 1
2) Le graphe de la fonction f n'est pas tracé. La fonction f est définie sur R^+, continue et dérivable. La variable x doit appartenir à l'intervalle fermé [0,11]
3) Le graphe de la fonction g n'est pas tracé. Le point d'équilibre entre l'offre et la demande correspond à un prix se situant autour de 3,10 francs (soit une quantité de 7,6 unités)
4) L'aire demandée vaut 26,21 (24 ln12 + 8 ln15 – 8 ln4 –44)

EXERCICE n° 2

1) $I_0 = J_0 = 1$
2) $I_n = \dfrac{1 - ne^{-n\pi/2}}{n^2+1}$; $J_n = \dfrac{n + e^{-n\pi/2}}{n^2+1}$
3) $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

EXERCICE n° 3

1) P(un client achète un forfait journée) = 0,72
P(un client achète un forfait demi-journée) = 0,22
2) Le coût du forfait annuel est de 1010 francs. Dans l'hypothèse où le client achète son forfait au coup par coup, il versera 1062 francs((0,72x20x60)+(0,22x20x45)). Le client n'a donc pas financièrement raison.

EXERCICE n° 4

1) (v_n) est une suite géométrique de raison $e^{0,5}/10$ et de premier terme $v_0=1$
2) La démonstration pour P_n s'effectue par récurrence. L'ensemble E cherché correspond à n entier inférieur ou égal à 4.

EXERCICE n° 5

La limite cherchée est 0.

ANNEE 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B - OPTION ECONOMIE

Corrigé de l'épreuve d'analyse d'une documentation statistique

EXERCICE n° 1

1) L'évolution des ventes en fonction du temps n'est pas tracée. Toutefois, à l'examen de ce graphique, on constate que celui-ci se décompose en trois phases :
   - une phase de forte progression des ventes ;
   - suivie d'une phase de stabilité assez prolongée dans le temps ;
   - enfin d'une phase de décrue des ventes.

2) A = 18875 ; B = 290187500 ; C = 1,25 ; r^2 = 0,982

3) La progression annuelle des ventes est estimée à 48,6%

4) La fonction f correspond à un accroissement des ventes selon un modèle linéaire alors que la fonction g se base sur une modélisation exponentielle. Au vu du graphique, il semble que la fonction g soit « plus proche » des points réels de vente (fonction v) qu'avec la fonction f. On pourrait calculer le coefficient r dans le cas de la fonction g pour comparer ces deux indicateurs…

EXERCICE n° 2

Il n'y a pas de corrigé-type de cet exercice. Par contre, quelques idées émergent :

- le salaire net annuel versé s'établit à 120 KF ;
- le francilien gagne 40 KF de plus que le salarié provincial ;
- hors la région Ile de France, la principale disparité oppose les départements possédant une grande ville aux autres ;
- il y a un écart de salaire du fait de la différence de qualification ;
- il y a un écart de salaire du fait de la différence du secteur d'activité ;
- la localisation géographique joue également un rôle important…

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix

SUJET N° 1

Commentez ces phrases de Simone WEIL tirées de «L'enracinement». «Cela n'a pas de sens de dire que les hommes ont, d'une part des droits, d'autre part des devoirs... Un homme qui serait seul dans l'univers n'aurait aucun droit mais il aurait des obligations»

SUJET N° 2

Le droit doit-il se contenter de suivre l'évolution des moeurs ?

SUJET N° 3

Commentez ces phrases d'Ernest RENAN dans «qu'est-ce qu'une nation ?». «Une grande agrégation d'hommes, saine d'esprit et chaude de coeur, crée une conscience morale et s'appelle une nation».

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Note : l'épreuve est composée de quatre exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent.

EXERCICE n° 1

On définit la suite (u_n) par son terme initial $u_0=1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

❶ Calculer u_1, u_2, u_3.

❷ Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$.

① Etudier la fonction h et tracer son graphe (C) dans un repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

② Tracer la droite (d) d'équation y=x dans le même repère.

③ Construire à l'aide de (C) et de (d) les points de l'axe (O, $\vec{i}$) d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

❸ (v_n) est la suite définie pour tout n par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

① Calculer v_0, v_1, v_2.

② Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

③ Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

❹ Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE n° 2

Le corps de base dans cet exercice est celui des nombres réels. L'espace vectoriel E, de dimension 3, est rapporté à la base B = $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$. La représentation du vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de E dans B est donc la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a, b, c étant trois réels, on définit une matrice (3 x 3) par l'égalité :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On rappelle de plus que I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ désigne la matrice identité.

❶ ① Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M(a,b,1).

② M(a,b,1) est-elle diagonalisable ?

③ On pose M(a,b,1) = I + U(a,b). Ecrire la matrice U(a,b). Calculer $U^2(a,b)$ et $U^3(a,b)$. Que remarque-t-on ?

④ En déduire une expression de $M^n(a,b,1)$ en fonction de n, a et b où n est un entier naturel non nul.

❷ On suppose dans la suite de l'exercice que $c \neq 1$.

① Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M(a,b,c).
② A quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur le réel a, M(a,b,c) admet-elle un sous-espace propre de dimension 2 ? En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M(a,b,c) soit diagonalisable.

EXERCICE n° 3

Soit n un nombre entier supérieur à 1. On considère une urne dans laquelle se trouvent :

une boule portant le numéro 1 ;
deux boules portant le numéro 2 ;
trois boules portant le numéro 3 ;
...
n boules portant le numéro n.

❶ Calculer le nombre de boules contenues dans l'urne.

❷ On tire au hasard une boule dans l'urne. En supposant que n est pair, exprimer en fonction de n la probabilité de tirer une boule :

① portant un numéro pair.

② portant un numéro impair.

❸ Dans cette question, on suppose que le nombre total de boules dans l'urne est 21. On tire au hasard une boule dans l'urne. Donner la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement inférieur à 4.

EXERCICE n° 4

Donner un développement limité à l'ordre 10 de sin x au point 0 puis de cos x à l'ordre 9. En déduire un développement limité de tg x à l'ordre 7 au point 0.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

SUJET N° 1

Après avoir rappelé l'apport de la théorie ricardienne en matière de commerce international, vous analyserez les modalités et les limites des stratégies d'insertion des pays en voie de développement dans les échanges internationaux.

SUJET N° 2

MICRO-ECONOMIE

❶ Soit une entreprise de fabrication d'ordinateurs pour laquelle la fonction de coût total du modèle portable est :

$$C = Q^3 + Q + 16$$

avec C exprimée en millions de francs et Q en milliers d'exemplaires.

Il vous est demandé :

1. de construire un tableau donnant le coût total, le coût fixe total, le coût variable total, le coût moyen et le coût marginal lorsque Q est compris entre 1 et 10 ;
2. de construire les courbes de coût moyen et de coût marginal sur un même graphique ;
3. de donner les formules du coût moyen et du coût marginal ;
4. de calculer le prix en dessous duquel l'entreprise se retirera du marché ;
5. de présenter la fonction d'offre de l'entreprise.

❷ Soit une entreprise de services aux particuliers dont le travail est le seul input de la fonction de production. Celle-ci est donnée par la formule :

$$f(W) = W^{\alpha} \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

Il vous est demandé :

1. de montrer que le produit marginal de cette entreprise est décroissant ;
2. de déterminer l'optimum du producteur en situation de concurrence parfaite (prix du service fixé par les conditions du marché);
3. d'en déduire la fonction de demande de travail de cette entreprise.

N.B. On notera s le niveau de salaire et p le prix du service vendu;

MACRO-ECONOMIE

EXERCICE

Soit une économie fictive sans relation avec l'extérieur décrite à travers les équations suivantes :

(1) $C = 0{,}75Y_d + 15$
(2) $Y_d = Y - T$
(3) $T = 0{,}20Y$
(4) $I = 0{,}2Y + 10$
(5) $Y = C + I + G_o$

C = consommation privée
Y = revenu ou produit national
Y_d = revenu disponible
T = prélèvement obligatoire
G = dépense publique (variable exogène $G = G_O$)
I = investissement

❶ Définir et calculer les propensions moyenne et marginale à consommer.

❷ Sachant que $G_0 = 55$, définir et calculer le revenu d'équilibre pour cette économie.

❸ Définir le principe du multiplicateur keynésien et calculer la valeur du multiplicateur de dépenses publiques ($\Delta G > 0$, $\Delta I = 0$) dans cette économie.

❹ Sachant que le plein emploi est obtenu pour un revenu de 480, décrivez la situation qui se produirait si le gouvernement augmentait les dépenses publiques de 20. En faire une représentation graphique.

QUESTION

Comment mesurer l'activité économique d'un pays?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 1999

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Attention : le tableau de synthèse joint (récapitulatif des résultats numériques) doit être impérativement joint avec votre copie.

PARTIE N° 1

Evolution démographique

Dans cette première partie, on veut étudier l'évolution démographique des pays africains entre 1986 et 1997.

Le chiffre fourni dans le tableau 1 dans la rubrique *population* donne le nombre d'habitants en milieu d'année, estimé soit par extrapolation à partir du dernier recensement, soit à partir de sondages lorsque les recensements disponibles sont trop anciens ou peu fiables.

❶ On définit les 11 zones ci-dessous :

- Maghreb
- Afrique Sahélienne
- Afrique Extrême-Occidentale
- Golfe de Guinée
- Afrique de l'Est
- Afrique Centrale
- Afrique du Nord-Est
- Vallée du Nil
- Afrique Sud-Tropicale
- Afrique Australe
- Océan Indien.

Pour chacune de ces zones (ainsi que du total Afrique), calculer le taux moyen annuel de croissance de la population entre 1986 et 1997.

❷ En supposant que, pour chacune de ces zones, l'évolution annuelle de 1998 à l'an 2000 sera identique à celle qui vient d'être calculée, donner le nombre d'habitants en l'an 2000.

PARTIE N° 2

Evolution du PIB/Habitant

Le chiffre fourni dans le tableau 2 dans la rubrique *PIB* est le produit intérieur brut. Il mesure la richesse dans le pays pendant l'année, en additionnant la valeur ajoutée dans les différentes branches. Il est exprimé en milliards de dollars.

En utilisant la même méthode que celle proposée dans la partie I, une estimation du PIB pour l'an 2000 vous est donnée (colonne h).

❶ A partir des résultats de la partie I, calculer pour l'an 2000, une estimation de l'indicateur "PIB/Habitant" pour chacune des 11 zones précédemment définies, ainsi que du total Afrique.

❷ Le même exercice avait été réalisé à partir des données de population et de PIB de l'année 1994 : la dernière colonne du tableau de synthèse donne les estimations trouvées par zone géographique. Sur la base des résultats qui vous sont communiquées (colonnes c et f du tableau 2), des données de l'année 1994 (cf. tableau 3) et de vos précédents calculs, commenter les écarts d'estimations de l'indicateur "PIB/Habitant" pour l'an 2000 faites à partir des données 1994 et des données 1997.

Tableau 1 - Données Population

		Année 1986		Année 1997	
	Superficie (en km2)	Population (en millions)	Densité (hab./km2)	Population (en millions)	Densité (hab./km2)
Algérie	2 381 741	22,41	9,41	28,78	12,08
Libye	1 759 540	3,77	2,14	5,59	3,18
Maroc	450 000	22,50	50,00	27,02	60,04
Mauritanie	1 030 700	1,95	1,89	2,33	2,26
Tunisie	163 610	7,45	45,54	9,16	55,99
Maghreb	5 785 591	58,08	10,04	72,88	12,60
Burkina Faso	274 200	6,75	24,62	10,78	39,31
Mali	1 240 000	8,44	6,81	11,13	8,98
Niger	1 267 000	6,28	4,96	9,47	7,47
Tchad	1 284 000	5,14	4,00	6,52	5,08
Afrique Sahélienne	4 065 200	26,61	6,55	37,90	9,32
Cap Vert	4 030	0,34	84,37	0,40	98,26
Gambie	11 300	0,65	57,52	1,14	100,88
Guinée	245 860	6,21	25,26	7,52	30,59
Guinée Bissau	36 120	0,91	25,19	1,09	30,18
Libéria	111 370	2,22	19,93	2,25	20,20
Sénégal	196 200	6,60	33,64	8,53	43,48
Sierra Leone	71 740	3,66	51,02	4,30	59,94
Afrique Extrême-Occidentale	676 620	20,59	30,43	25,23	37,28
Bénin	112 622	4,04	35,87	5,56	49,37
Côte d'Ivoire	322 462	10,18	31,57	14,02	43,48
Ghana	238 537	14,04	58,86	17,83	74,75
Nigéria	923 768	98,40	106,52	115,02	124,51
Togo	56 000	3,05	54,46	4,20	75,00
Golfe de Guinée	1 653 389	129,71	78,45	156,63	94,73
Burundi	27 830	4,86	174,63	6,22	223,50
Kénya	582 640	21,16	36,32	27,80	47,71
Ouganda	236 040	16,00	67,79	20,26	85,83
Rwanda	26 340	6,27	238,04	5,40	205,01
Tanzanie	945 090	22,46	23,76	30,80	32,59
Afrique de l'Est	1 817 940	70,75	38,92	90,48	49,77

Tableau 1 - Données Population

		Année 1986		Année 1997	
	Superficie	**Population**	**Densité**	**Population**	**Densité**
	(en km2)	**(en millions)**	**(hab./km2)**	**(en millions)**	**(hab./km2)**
Cameroun	475 440	10,45	21,98	13,56	28,52
Centrafrique	622 980	2,67	4,29	3,34	5,36
Congo	342 000	1,79	5,23	2,67	7,81
Gabon	267 670	1,17	4,37	1,11	4,15
Guinée équatoriale	28 050	0,40	14,26	0,41	14,62
Saint Thomas & Prince	960	0,11	114,58	0,14	140,63
Zaïre	2 345 410	31,24	13,32	46,81	19,96
Afrique Centrale	4 082 510	47,83	11,72	68,04	16,66
Djibouti	23 200	0,46	19,83	0,62	26,59
Ethiopie + Erythrée	1 221 000	44,39	36,36	61,52	50,38
Somalie	637 660	4,79	7,51	9,82	15,40
Afrique du Nord-Est	1 881 860	49,64	26,38	71,96	38,24
Egypte	1 001 449	49,61	49,54	63,27	63,18
Soudan	2 505 810	22,17	8,85	27,29	10,89
Vallée du Nil	3 507 259	71,78	20,47	90,56	25,82
Angola	1 246 700	8,97	7,19	11,19	8,98
Malawi	118 480	7,28	61,44	9,85	83,14
Mozambique	783 080	14,36	18,34	17,80	22,73
Zambie	752 610	6,85	9,10	8,28	11,00
Zimbabwé	390 580	8,41	21,53	11,44	29,29
Afrique Sud-Tropicale	3 291 450	45,87	13,94	58,56	17,79
Afrique du Sud	1 221 037	33,20	27,19	42,39	34,72
Botswana	600 372	1,13	1,88	1,48	2,47
Lésotho	30 350	1,57	51,73	2,08	68,53
Namibie	824 290	1,59	1,93	1,58	1,92
Swaziland	17 360	0,67	38,59	0,88	50,69
Afrique Australe	2 693 409	38,16	14,17	48,41	17,97
Comores	2 170	0,45	207,37	0,63	291,24
Madagascar	587 040	10,26	17,48	15,35	26,15
Maurice	2 045	1,00	489,00	1,13	552,57
Réunion	2 520	0,54	214,29	0,66	263,49
Seychelles	280	0,07	250,00	0,07	264,29
Océan Indien	594 055	12,32	20,74	17,85	30,05
Total Afrique	30 049 283	571,34	19,01	738,49	24,58

Tableau 2 - Données PIB

	Année 1986			Année 1997				An 2000
	PIB (1)	**Population**	**PIB/Hab**	**PIB (1)**	**Population**	**PIB/Hab**	**Tx Croissance**	**PIB (1)(2)**
		(en millions)	**(en $)**		**(en millions)**	**(en $)**	**(en %)**	
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Algérie	55,20	22,41	2 463	44,60	28,78	1 550		
Libye	27,00	3,60	7 500	29,24	5,59	5 231		
Maroc	13,40	22,50	596	36,28	27,02	1 343		
Mauritanie	0,70	1,95	359	1,10	2,33	472		
Tunisie	9,00	7,45	1 208	19,57	9,16	2 136		
Maghreb	105,30	57,91	1 818	130,79	72,88	1 795	1,99%	138,76
Burkina Faso	1,08	6,75	160	2,42	10,78	224		
Mali	1,07	8,44	127	2,44	11,13	219		
Niger	1,25	6,28	199	1,89	9,47	200		
Tchad	0,36	5,14	70	1,14	6,52	175		
Afrique Sahélienne	3,76	26,61	141	7,89	37,90	208	6,97%	9,66
Cap Vert	0,14	0,34	412	0,37	0,40	924		
Gambie	0,17	0,65	262	0,35	1,14	311		
Guinée	1,95	6,21	314	3,59	7,52	477		
Guinée Bissau	0,15	0,91	165	0,27	1,09	243		
Libéria	1,04	2,22	468	1,05	2,25	467		
Sénégal	2,40	6,60	364	5,11	8,53	599		
Sierra Leone	1,38	3,66	377	0,76	4,30	177		
Afrique Extrême-Occidentale	7,23	20,59	351	11,50	25,23	456	4,31%	13,05
Bénin	1,08	4,04	267	2,03	5,56	365		
Côte d'Ivoire	6,25	10,18	614	9,25	14,02	660		
Ghana	4,96	14,04	353	6,72	17,83	377		
Nigéria	67,11	98,40	682	28,41	115,02	247		
Togo	0,75	3,05	246	1,27	4,20	302		
Golfe de Guinée	80,15	129,71	618	47,68	156,63	304	-4,61%	41,38
Burundi	1,11	4,86	228	0,98	6,22	158		
Kénya	5,96	21,16	282	7,58	27,80	273		
Ouganda	3,29	16,00	206	4,67	20,26	231		
Rwanda	1,73	6,27	276	1,13	5,40	209		
Tanzanie	5,84	22,46	260	3,70	30,80	120		
Afrique de l'Est	17,93	70,75	253	18,06	90,48	200	0,07%	18,10

(1) en milliards de $
(2) estimation

Tableau 2 - Données PIB

	Année 1986			Année 1997				An 2000
	PIB (1)	Population	PIB/Hab	PIB (1)	Population	PIB/Hab	Tx Croissance	PIB (1)(2)
		(en millions)	(en $)		(en millions)	(en $)	(en %)	
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Cameroun	10,90	10,45	1 043	8,62	13,56	636		
Centrafrique	0,70	2,67	262	1,12	3,34	335		
Congo	1,91	1,79	1 067	1,78	2,67	667		
Gabon	3,85	1,17	3 291	3,76	1,11	3 387		
Guinée équatoriale	0,06	0,40	150	0,15	0,41	371		
Saint Thomas & Prince	0,03	0,11	273	0,05	0,14	333		
Zaïre	5,22	31,24	167	5,31	46,81	113		
Afrique Centrale	22,67	47,83	474	20,79	68,04	306	-0,79%	20,30
Djibouti	0,22	0,46	478	0,49	0,62	794		
Ethiopie + Erythrée	5,47	44,39	123	6,42	61,52	104		
Somalie	1,45	4,79	303	0,88	9,82	90		
Afrique du Nord-Est	7,14	49,64	144	7,79	71,96	108	0,80%	7,98
Egypte	32,20	49,61	649	67,40	63,27	1 065		
Soudan	7,35	22,17	332	6,38	27,29	234		
Vallée du Nil	39,55	71,78	551	73,78	90,56	815	5,83%	87,46
Angola	2,55	8,97	284	4,42	11,19	395		
Malawi	1,22	7,28	168	1,62	9,85	164		
Mozambique	0,95	14,36	66	1,35	17,80	76		
Zambie	2,60	6,85	380	3,61	8,28	436		
Zimbabwé	5,45	8,41	648	5,93	11,44	518		
Afrique Sud-Tropicale	12,77	45,87	278	16,93	58,56	289	2,60%	18,28
Afrique du Sud	61,59	33,20	1 855	126,30	42,39	2 979		
Botswana	0,90	1,13	796	4,40	1,48	2 973		
Lésotho	0,73	1,57	465	1,52	2,08	731		
Namibie	1,22	1,59	767	3,10	1,58	1 962		
Swaziland	0,49	0,67	731	1,05	0,88	1 193		
Afrique Australe	64,93	38,16	1 702	136,37	48,41	2 817	6,98%	166,96
Comores	0,11	0,45	244	0,24	0,63	375		
Madagascar	2,51	10,26	245	3,18	15,35	207		
Maurice	1,11	1,00	1 110	4,26	1,13	3 770		
Réunion	1,89	0,54	3 500	6,35	0,66	9 563		
Seychelles	0,15	0,07	2 143	0,49	0,07	6 581		
Océan Indien	5,77	12,32	468	14,51	17,85	813	8,75%	18,67
Total Afrique	367,20	571,17	643	486,09	738,49	658	2,58%	524,74

(1) en milliards de $
(2) estimation

Tableau 3 - Données de l'année 1994

	Année 1994		
	PIB (1)	**Population**	**PIB/Hab**
		(en millions)	**(en $)**
Algérie	48,34	27,81	1 738
Libye	29,24	5,22	5 602
Maroc	28,09	27,60	1 018
Mauritanie	1,16	2,27	511
Tunisie	15,53	8,76	1 773
Maghreb	122,36	71,66	1 708
Bourkina Faso	3,40	10,07	338
Mali	2,71	10,46	259
Niger	2,52	8,81	286
Tchad	1,21	6,18	196
Afrique Sahélienne	9,84	35,52	277
Cap Vert	0,41	0,41	1 007
Gambie	0,37	1,03	361
Guinée	3,51	6,50	540
Guinée Bissau	0,17	1,05	162
Libéria	1,05	2,94	357
Sénégal	6,01	8,16	737
Sierra Leone	0,74	4,62	160
Afrique Extrême-Occidentale	12,26	24,70	496
Bénin	2,24	5,23	428
Côte d'Ivoire	8,56	13,89	616
Ghana	6,52	16,94	385
Nigéria	33,89	123,08	275
Togo	1,36	4,01	339
Golfe de Guinée	52,57	163,15	322
Burundi	1,16	6,17	188
Kénya	8,47	26,97	314
Ouganda	3,16	19,82	159
Rwanda	1,67	8,06	207
Tanzanie	3,11	29,75	105
Afrique de l'Est	17,57	90,77	194

Tableau 3 - Données de l'année 1994

	Année 1994		
	PIB (1)	**Population**	**PIB/Hab**
		(en millions)	**(en $)**
Cameroun	9,51	12,90	737
Centrafrique	1,10	3,34	329
Congo	3,28	2,51	1 307
Gabon	5,46	1,32	4 136
Guinée équatoriale	0,17	0,39	437
Saint Thomas & Prince	0,05	0,13	385
Zaïre	6,82	42,48	161
Afrique Centrale	26,39	63,07	418
Djibouti	0,49	0,50	988
Ethiopie + Erythrée	6,75	56,31	120
Somalie	0,88	9,84	89
Afrique du Nord-Est	8,12	66,65	122
Egypte	43,71	57,28	763
Soudan	6,76	28,17	240
Vallée du Nil	50,47	85,45	591
Angola	2,84	10,67	266
Malawi	2,09	11,01	190
Mozambique	1,09	15,82	69
Zambie	3,75	9,13	411
Zimbabwé	5,32	11,21	475
Afrique Sud-Tropicale	15,09	57,84	261
Afrique du Sud	114,30	41,75	2 738
Botswana	3,77	1,39	2 712
Lésotho	1,18	1,93	611
Namibie	2,45	1,63	1 503
Swaziland	0,97	0,84	1 160
Afrique Australe	122,67	47,54	2 581
Comores	0,30	0,63	476
Madagascar	3,11	13,70	227
Maurice	3,20	1,12	2 857
Réunion	5,76	0,64	9 000
Seychelles	0,44	0,07	6 027
Océan Indien	12,81	16,16	793
Total Afrique	450,15	722,51	623

Tableau de synthèse

(A rendre impérativement avec sa copie)

Synthèse	Partie I		Partie II	
	Question 1	Question 2	Question 1	
		An 2000		
		Population	**PIB/Hab**	**PIB/Hab**
	Tx Croissance	**Estimation**	**Estimation**	**Estimation**
	(en %)	**(en millions)**	**(en $)**	**(en $)**
			données 97	**données 94**
Maghreb				1 632
Afrique Sahélienne				459
Afrique Extrême-Occidentale				643
Golfe de Guinée				198
Afrique de l'Est				158
Afrique Centrale				381
Afrique du Nord-Est				108
Vallée du Nil				622
Afrique Sud-Tropicale				248
Afrique Australe				3 527
Océan Indien				1 176
Total Afrique				**609**

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B - OPTION ECONOMIE

Année 1999

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHS

EXERCICE n° 1

1) $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 11/7$; $u_4 = 67/29$;
2) La fonction h est bien définie sur l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$. Elle est continue et dérivable : on peut donc tracer son graphe (non tracé ici)
3) $V_0 = -1/3$; $v_1 = 1/5$; $v_2 = -3/25$; la suite (v_n) est une suite géométrique de raison –3/5 et de premier terme –1/3. La limite de v_n quand n tend vers l'infini vaut 0
4) La limite de u_n quand n tend vers l'infini vaut 2

EXERCICE n° 2

1) Quand c=1, la valeur propre λ vaut 1 et elle est valeur triple (d'ordre 3). La recherche des vecteurs propres associés conduit à discuter selon les valeurs de a et de b. Dans tous les cas de figure, M(a,b,1) est non diagonalisable. U^3 étant la matrice nulle, on a :

$$M^n = I + nU + (n(n-1)/2)U^2$$

2) Quand c est différent de 1, il y a deux valeurs propres distinctes $\lambda = 1$ (valeur propre double) et $\lambda = c$ (valeur propre simple). L'espace vectoriel associé à $\lambda = c$ est nécessairement de dimension 1, la condition nécessaire et suffisante est que l'espace vectoriel associé à $\lambda = 1$ soit de dimension 2, condition remplie lorsque a = 0

EXERCICE n° 3

1) Le nombre de boules contenues dans l'urne est égal à n(n+1)/2
2) En supposant n pair, la probabilité de tirer une boule portant un numéro pair est égale à (n+2)/(2n+2). La probabilité de tirer une boule portant un numéro impair est égale à n/(2n+2)
3) La probabilité cherchée vaut 2/7

EXERCICE n° 4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + x^8 \varepsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9 \varepsilon(x)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + x^7 \varepsilon(x)$$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B - OPTION ECONOMIE

Année 1999

Corrigé de l'épreuve d'analyse d'une documentation statistique

Dans cette épreuve, tous les calculs étaient à remettre dans le tableau joint en annexe à l'énoncé. Ce tableau récapitulatif rempli est ci-dessous :

Synthèse	Partie I		Partie II	
	Question 1	Question 2	Question 1	
	Taux de Croissance (en %)	**An 2000 Population Estimation (en millions)**	**PIB/Hab Estimation (en $)**	**PIB/Hab Estimation (en $) ancienne**
Maghreb	2,09%	77,53	1790	1 632
Afrique Sahélienne	3,27%	41,74	231	459
Afrique Extrême-Occidentale	1,86%	26,66	489	643
Golfe de Guinée	1,73%	164,90	251	198
Afrique de l'Est	2,26%	96,76	187	158
Afrique Centrale	3,26%	74,90	271	381
Afrique du Nord-Est	3,43%	79,62	100	108
Vallée du Nil	2,14%	96,49	906	622
Afrique Sud-Tropicale	2,25%	62,59	292	248
Afrique Australe	2,19%	51,66	3232	3 527
Océan Indien	3,43%	19,75	945	1 176
Total Afrique	**2,36%**	**792,02**	**663**	**609**

1) Pour calculer les chiffres de la première colonne, il fallait utiliser la formule :

Population 1997 = $(1+\text{taux de croissance})^{1997-1986}$ x Population 1986

Les chiffres de population des années 1997 et 1986 sont donnés dans le tableau 1 de l'énoncé, chiffres exprimés en millions

2) Pour calculer les chiffres de la deuxième colonne, il fallait utiliser la formule :

Population 2000 = $(1+\text{taux de croissance précédemment trouvé})^{2000-1997}$ x Population 1997

3) Pour calculer les chiffres de la troisième colonne, il fallait utiliser la formule :

Indicateur = PIB 2000 / Population 2000 trouvée précédemment. Il fallait l'exprimer en $.

Les chiffres du PIB 2000 sont donnés dans la dernière colonne du tableau 2, chiffres exprimés en milliards de $

4) En ce qui concerne le commentaire, il n'y a pas de corrigé type. On pouvait observer qu'il y avait des disparités importantes dans certaines zones, Afrique sahélienne notamment (écart de 1 à 2),…

SESSION D'AVRIL 2000

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée de 5 exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE n° 1

En posant $X = x + \frac{1}{x}$, résoudre dans IR l'équation

$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$

EXERCICE n° 2

On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 (2\ln x - 1)$

❶Quel est son domaine de définition ?

❷Trouver la limite de f (x) lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$

❸Pour quelle valeur non nulle f admet-elle un minimum ?

❹Calculer $I = \int_0^1 x\ln x \, dx$

EXERCICE n° 3

On répartit 784 pièces de 1 franc en petits tas de la façon suivante :

- le premier tas se réduit à 1 pièce de 1 franc,
- le second tas compte 3 pièces de 1 franc,
- le troisième tas en compte 5,
- et ainsi de suite.

Ensuite, on remet chaque tas à des joueurs par ordre de mérite croissant. Le moins méritant prend le premier tas (1 pièce de 1 franc), le second les deux tas suivants (soit 3 et 5 pièces de 1 franc), le troisième les trois tas suivants (soit 7, 9 et 11 pièces de 1 franc), ainsi de suite. Tous furent ainsi servis et il ne resta rien. Combien de tas et de joueurs y avait-il ?

EXERCICE n° 4

Etudier la convergence dans IR de la suite (u_n) $n \in$ IN définie par

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$, selon la valeur de u_0

EXERCICE n° 5

Soit (u_n), (v_n), (w_n), $n \in IN$, trois suites réelles vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}$$

où u_0, v_0, w_0 sont des valeurs réelles quelconque données.

❶ Ecrire le système précédent sous forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$

où $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et A est une matrice que l'on déterminera.

❷ Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. La matrice A est-elle diagonalisable ?

❸ Résoudre le système en déterminant d'abord la solution (w_n) $n \in IN$.

❹ Ecrire explicitement A^n, pour n=2.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

N.B. : Le candidat traitera l'un des deux sujets, au choix.

SUJET N° 1

Après avoir rappelé les arguments montrant que la concurrence des pays à bas salaires crée du chômage dans les pays industrialisés, vous présenterez les insuffisances de cette analyse et vous indiquerez les avantages pour la communauté internationale d'une insertion des pays en développement dans le commerce mondial.

N.B. : Dans l'équilibre de ces réponses, le candidat devra observer le barème.

SUJET N° 2

MICROECONOMIE

EXERCICE : 7 points.

On étudie le comportement d'une compagnie aérienne sur deux lignes de son réseau : Paris - Bangui (ligne A) et Paris - Yaoundé (ligne B).
On suppose que sur chacune de ces deux lignes la compagnie est en situation de monopole.

Une étude de trafic a mis évidence la relation suivante :

$$Q = -4P + 18004$$

Avec, dans un premier temps, Q représentant le nombre total de passagers sur les deux lignes et P, un prix unique sur les deux lignes.

L'analyse des charges d'exploitation fait apparaître une fonction de coût total :

$$CT = 1/5\ Q^2 + Q + 11\ 000\ 000$$

❶ Après avoir donné l'expression mathématique de la recette moyenne Rm, de la recette marginale R*m,* du coût moyen Cm et du coût marginal C*m,* vous indiquerez la signification qu'il convient de donner ici au coût marginal.

❷ Représentez sur un graphique les courbes permettant de faire apparaître l'équilibre prix quantité lorsque la compagnie maximise son profit.

❸ Une commission de contrôle relève que le prix du billet a été fixé à P = 2250F50 et décide d'attaquer la compagnie avec l'argument « à ce prix, on maximise le chiffre d'affaires sans tenir compte des coûts ». Que pensez- vous de cet argument ?

❹ La commission impose la tarification au coût marginal. Quel est alors le prix de vente du billet et le nombre de voyageurs ? Après avoir défini la notion de surplus du consommateur, vous calculerez sa valeur.

❺ Afin de réagir, le PDG de la compagnie demande à ces services d'affiner les études de trafic. Des fonctions de demande spécifiques à chaque ligne sont alors mises en évidence :

Ligne A : QA = -3PA + 12 003
Ligne B : QB = - PB + 6 001

Si PA = PB = 3 000 F, quelle clientèle (A ou B) a l'élasticité-prix directe la plus élevée en valeur absolue ? A ce prix, si la compagnie baisse le tarif de vol de 1 %, sur quelle ligne le taux de croissance du trafic sera le plus élevé ?

QUESTION : 3 points.

L'arbitrage intertemporel du consommateur.

MACROECONOMIE

EXERCICE : 7 points.

Une économie a les caractéristiques suivantes :

Fonction de consommation de l'ensemble des ménages : C = 0,8Yd + 500, où Yd est le revenu disponible, c'est à dire le revenu Y diminué des impôts T ;

Fonction d'investissement privé : I = 0,1Yd - 10 000i + 200, i étant le taux d'intérêt ;

Importations : M = 0,1Yd ;

Les exportations sont exogènes et égales à X = 1000 ;

Demande d'encaisse de transaction : Mdt = 0,16Y ;

Demande d'encaisse de spéculation : Mds = - 2000i + 500 :

La masse monétaire en circulation est égale à M0 = 1000.

❶ On suppose tout d'abord que l'Etat finance ses dépenses par un impôt proportionnel au revenu, T = 0,20Y, l'équilibre budgétaire étant respecté. Déterminer alors toutes les grandeurs macroéconomiques en passant par l'intermédiaires des courbes IS = LM

❷ Le produit national de plein emploi étant de 5 000, on se fixe comme objectif d'atteindre ce produit :

Donner quelques mesures à prendre pour cet objectif ;

Finalement, le gouvernement se décide à accepter un déficit budgétaire. De quel montant doit - il être ?

QUESTION : 3 points.

Le chômage conjoncturel (définition, explications, politiques de lutte).

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Attention : Une attention particulière sera portée sur les commentaires.

Il est proposé d'étudier succinctement l'évolution de l'effectif de la population dans les pays du tiers monde à partir des données suivantes :

Tableau 1

Evolution du taux brut de natalité (TBN)
et du taux brut de mortalité (TBM)

	TBN annuel moyen pour la période en ‰		**TBM** annuel moyen pour la période en ‰	
	1950-1955	1975-1980	1950-1955	1975-1980
Chine	39,8	21,3	20,1	7,4
Inde	42,0	35,3	26,6	15,1
Kenya	49,2	53,8	26,6	14,1
Ensemble des pays en voie de développement ..	42,9	33,0	23,2	12,1

Source : Revue Tiers Monde, 1983.

Tableau 2

Evolution de la population (en millions d'habitants)

	Population constatée	Population projetée	
	1982	1990	2000
Chine	1 008	1 094	1 196
Inde	717	844	994
Kenya	18	26	40

Source : Banque mondiale: rapport sur le développement dans le monde 1984.

Question 1 :

Est d'abord examiné le mouvement naturel dans l'ensemble des pays.

a) Calculez, pour les pays en voie de développement, le taux d'accroissement annuel moyen pour la période 1950-1955 puis pour la période 1975-1980 après avoir rappelé la définition du taux d'accroissement naturel.

b) Commentez brièvement l'évolution constatée.

Question 2 :

Est maintenant observé le mouvement naturel en Chine, en Inde et au Kenya.

Calculez pour chaque pays, le taux d'accroissement naturel annuel moyen pour la période 1950-1955 et pour la période 1975-1980. Commentez.

Question 3 :

Est enfin envisagée l'évolution future de l'effectif de la population en Chine, en Inde et au Kenya

a) Outre la natalité et la mortalité, quelles autres composantes interviennent dans l'évolution démographique d'une population ?

b) En supposant le maintien dans le futur du taux d'accroissement naturel annuel moyen constaté dans la période 1975-1980 et l'absence de mouvement migratoire :

- Calculez le temps de doublement de la population de chacun des 3 pays.
- Calculez l'effectif de la population de chaque pays en 1990 et en 2000 en prenant comme population de départ l'effectif constaté en 1982 ; comparez pour chaque pays ces résultats avec les populations projetées du tableau 2 et commentez.

RAPPEL DE COURS

Mouvement général d'une population

I - Accroissement naturel

Pour une population fermée, c'est-à-dire sans apports ni pertes extérieurs, l'accroissement de la population se juge à la différence entre naissances et décès. On l'appelle *accroissement naturel*. Le taux d'accroissement naturel (annuel par exemple) s'obtient en rapportant cet accroissement à l'ensemble de la population. C'est la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité.

Au cours d'une période donnée, une population fermée se modifie de trois façons :

a) Naissance d'enfants (d'âge zéro) ;
b) Décès de personnes de divers âges ;
c) Vieillissement de chaque individu.

Le taux d'accroissement naturel ne tient compte que des deux premiers phénomènes et fait intervenir de même façon le décès d'un adulte, d'un enfant ou d'un vieillard.

De ce fait, ce taux d'accroissement est parfois trompeur. Par exemple, une population composée en grande partie d'adultes peut avoir un taux d'accroissement momentanément positif, alors que sa natalité est insuffisante.

La méthode de la population type est moins recommandable encore que pour la mortalité ou la natalité, car il est utile de juger de façon absolue la vitalité d'une population.

Par contre, la descendance finale nette d'une génération peut être calculée, mais cet indice est très tardif.

II - Taux net de reproduction

Au lieu d'additionner les taux de fécondité à chaque âge (naissances réduites), comme pour le taux brut, ce qui suppose la mortalité nulle, on les applique à une population ayant même composition que la table de survie. On obtient ainsi le taux net de reproduction ou de remplacement du moment.

L'interprétation de ce taux est la suivante : on suit un effectif de 1000 filles à la naissance. Cet effectif est réduit suivant les lois de mortalité de la population considérée, puis obéit également à ses lois de fécondité et donne naissance à un nombre de filles qui n'est autre que le taux de reproduction. Ce taux mesure, en somme, le rapport entre deux générations successives, ou du moins celui que l'on peut attendre, si les conditions restent les mêmes à l'avenir.

Le taux de reproduction a un sens nettement prévisionnel : " Si les taux de fécondité et de mortalité à chaque âge restent ce qu'ils sont, une génération assurera son remplacement à concurrence de x % ".

Une population peut croître quelque temps, malgré un taux de reproduction inférieur à l'unité (et inversement). Mais, à la longue, la diminution est fatale, sauf allongement illimité suffisant de la vie humaine.

III - Population stable et population stationnaire

Une population fermée dont les taux de fécondité et de mortalité restent invariables à chaque âge tend à la limite vers une composition par âges fixe (Lotka). Cette population limite s'accroît ou diminue à une vitesse constante, tout en restant en quelque sorte semblable à elle-même, c'est-à-dire en ayant toujours même proportion de jeunes, d'adultes, etc. Une telle population est dite stable.

Toute perturbation accidentelle (guerre, épidémie) est peu à peu corrigée, nivelée, par la constance des lois de mortalité et de fécondité, et la tendance reprend vers la même population stable. La composition par âges de celle-ci ne dépend en somme que de ces lois et non de l'état initial ni des accidents temporaires.

Le coefficient d'accroissement (annuel) de la population stable est appelé taux naturel d'accroissement (annuel) de la population. Lorsque ce taux est nul, la population tend vers l'état stationnaire. Une population stationnaire conserve non seulement le même total, mais encore sa composition par âges. Celle-ci est identique à la table de survie.

Taux de Lotka et taux net de reproduction sont d'ailleurs étroitement apparentés. Toutefois, l'un est annuel et l'autre lié à l'intervalle de deux générations.

L'intervalle de deux générations est l'âge moyen des parents (de la mère, dans la plupart des calculs) au moment de la naissance. Si on appel n cet intervalle, on a la relation approximative suivante :

$t = (L + r)^{n}$
t taux n et de reproduction
r taux de Lotka

formule identique à celle du taux d'intérêt composé.

Les deux taux peuvent se calculer séparément pour chaque sexe. Le plus souvent, les calculs sont faits sur la population féminine.

Le taux de Lotka et le taux de reproduction net présentent les mêmes inconvénients que le taux brut de reproduction : ils ne tiennent pas compte de la nuptialité et perdent une partie de leur signification pour les populations qui ont connu des perturbations (guerre, dépression économique, etc...) sur leur fécondité.

Ils présentent néanmoins une grande importance, en particulier pour les pays peu développés.

Des populations stationnaires ne peuvent pas exister tant que la mortalité diminue. Par contre, on trouve dans le monde des populations relativement stables, du fait de la constance de leur taux de natalité.

La notion de population " quasi stable " (Bourgeois-Pichat) facilité l'étude des populations de ces pays, généralement dans les pays peu évolués démographiquement.

Une population dont la mortalité diminue augmente ou vieillit.

IV - Migrations et population ouverte

Les migrations sont moins bien mesurées que les naissances et les décès, en particulier pour l'émigration. On peut les mesurer :

- directement par des relevés appropriés ;
- indirectement par la comparaison de recensements successifs.

On peut, comme pour les naissances et les décès, calculer des taux par 1000 habitants. La notion de migrations peut être étendue à des populations ne couvrant pas tout un territoire, par exemple la population active, ou encore la population adulte. Nous sommes ainsi amenés, de façon plus générale, à étudier les variations d'une " population qui reçoit des apports extérieurs ou qui perd des éléments au profit d'autres populations. Sans entrées, ni sorties, elle est dite fermée.

V- Reconstitution d'une population

L'ensemble des données démographiques d'une population suivie dans le temps est surabondant, car entre elles existent des relations.

De ce fait, lorsque certaines données manquent, il est parfois possible de les calculer en partant des autres.

De même, il existe des moyens techniques de corriger des données inexactes. L'ensemble de ces moyens permet, dans certaines limites, de reconstituer une population, comme Cuvier reconstituait un squelette, en n'en possédant que quelques os.

Ces procédés s'emploient pour les pays peu développés contemporains, ainsi que pour des populations de l'époque préstatistique (méthode Brass, méthode J. Bourgeois-Pichat, etc)

VI - Populations partielles ou sous populations

Toutes les indications et méthodes précédentes peuvent être appliquées à une population vivant dans un espace déterminé. On peut considérer la population scolaire, la population active, la population retraitée, la population médicale, etc..., en remplaçant pour plus de commodité, la notion de naissance par celle d'entrée et la notion de décès par celle de sortie.

Deux populations partielles, ou sous-populations, peuvent être indépendantes l'une de l'autre (cas de deux religions, par exemple, en cas d'absence de mariage mixte) ou en dépendance étroite (populations active ou inactive, par exemple).

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

«Par quels critères peut-on distinguer une oeuvre d'art d'un objet quelconque ?».

SUJET N° 2

«Est-il facile de penser librement ?».

SUJET N° 3

«La certitude d'avoir raison est-elle un indice suffisant de vérité ?» (baccalauréat 1994).

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE n° 1

L'ensemble solution est $S = \{-3-2\sqrt{2}\,;-3+2\sqrt{2}\}$

EXERCICE n° 2

1) Le domaine de définition de la fonction f est $D_f = R^{*+}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
3) Pour la valeur x=1, f admet un minima
4) I = -0,25

EXERCICE n° 3

Il y a 28 tas et 7 joueurs

EXERCICE n° 4

Si $u_0>2$	la suite est divergente
Si $u_0=2$	la suite est stationnaire et la limite vaut donc 2
Si $1<u_0<2$	la suite est convergente vers la limite 1
Si $u_0=1$	le suite est stationnaire et la limite vaut donc 1
Si $0<u_0<1$	la suite est convergente vers la limite 1
Si $u_0=0$	la suite est stationnaire à partir du rang 1, la limite est alors 2
Si $u_0<0$	la suite est divergente

EXERCICE n° 5

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) La recherche des valeurs propres donne deux résultats : $\lambda = 1$ (valeur simple) et $\lambda = 2$ (valeur double). L'espace vectoriel associé à la valeur propre 2 est de dimension 1, la matrice n'est donc pas diagonalisable

3) pour tout n de N $w_n=w_0$
$v_n=2^n v_0+(2^n-1)w_0$
$u_n=2^n u_0+2^{(n-1)}n(v_0+w_0)$

4) $\forall n \geq 2 \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE LA DOCUMENTATION STATISTIQUE

Année 2000

Question 1

a) Le taux d'accroissement naturel est un rapport. Au numérateur, figure la différence entre le nombre de naissances et le nombre de décès. Au dénominateur, figure le chiffre de la population. Ce taux est aussi la différence entre le taux brut de natalité et le taux brut de mortalité.

Taux cherché = TBN – TBM

Sur la période 1950-1955, ce taux vaut 1,97%
Sur la période 1975-1980, ce taux vaut 2,09%

b) Le taux d'accroissement naturel augmente entre les deux périodes observées alors que les taux bruts de natalité et de mortalité diminuent. Mais le taux brut de mortalité chute plus vite. On peut donc dire que bien qu'il y ait baisse de la natalité (ce qui signifie pas qu'il y ait moins de naissances), la population s'accroît du fait que la mortalité baisse dans des proportions plus élevées.

Question 2

	1950-1955	1975-1980
Chine	1,97%	1,39%
Inde	1,54%	2,02%
Kenya	2,26%	3,97%

Commentaire : Entre les deux périodes examinées, on constate que le taux d'accroissement naturel de la Chine diminue, surtout à cause de la forte baisse du taux brut de mortalité qui passe de 2,13% à 0,74. En ce qui concerne l'Inde, le taux augmente avec une baisse de la mortalité et de la natalité. Enfin, on constate que le Kenya augmente fortement son taux d'accroissement naturel en raison de la hausse du taux brut de natalité et de la baisse du taux de mortalité.

Question 3

a) L'effet migratoire
b) Le temps de doublement de la population en Chine est de 50,2 ans, il est de 34,7 ans en Inde et de seulement 17,8 ans au Kenya.

	1990	2000
Chine	1126	1292
Inde	841	1028
Kenya	25	36

Les chiffres du tableau ci-dessus sont exprimés en millions d'habitants. On constate qu'en 2000, à ce rythme, la population de l'Inde sera au même niveau que la Chine en 1982. Ici, ne figure pas la superficie des états concernés, mais on peut affirmer que la densité de population en Inde sera beaucoup plus élevée que celle de la Chine en 2000, toujours dans l'hypothèse que le rythme proposé par le sujet se maintienne.

Par comparaison avec le tableau 2, hors effet migratoire, on peut constater que la Banque Mondiale considère que le taux d'accroissement de l'Inde et du Kenya devraient légèrement diminuer sur la période 1990-2000 mais devrait être voisin du taux constaté sur la période 1975-1980 pour la période 1980-1990. Par contre, en ce qui concerne la Chine, le taux observé sur la période 1975-1980 devrait diminuer sur la période 1980-1990

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée de 5 exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Donner une primitive de la fonction

$$f(x) = \frac{5x^2 - 8x + 2}{(2x-3)^2}$$

Exercice n° 2

On considère la suite (u_n), n appartenant à l'ensemble des entiers naturels, solution de l'équation

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad \text{avec } u_0=0 \text{ et } u_1=1$$

1) Démontrer, par récurrence, que pour tout n, u_n est un entier naturel

2) Calculer u_n en fonction de u_0, u_1 et n

3) Etudier la convergence de la suite (u_n)

Exercice n° 3

Soit dans R^3, rapporté à la base canonique (e_1,e_2,e_3), l'endomorphisme f défini par

$f(e_1) = (1,5,3)$
$f(e_2) = (2,-1,5)$
$f(e_3) = (3,0,1)$

On considère la nouvelle base définie par les vecteurs a=(1,0,2) ; b=(2,1,0) ; c=(-1,1,-1)

1) Calculer l'expression d'un vecteur quelconque u de R^3 dans cette nouvelle base
2) Donner l'expression matricielle de f dans cette nouvelle base

Exercice n° 4

Résoudre le système suivant dans lequel m et p désignent deux paramètres réels

$$\begin{cases} x - 3y + z = p \\ mx + 2y + z = 6 \\ 4x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Exercice n° 5

Dans une population mixte, les individus ont soit le caractère A, soit le caractère B. Les caractères A et B sont exclusifs l'un de l'autre. Dans cette population, 60% des individus sont des hommes et 40% d'entre eux ont le caractère A ; 75% des femmes ont le caractère B. Un individu est choisi au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité que l'individu choisi soit un homme sachant qu'il a le caractère B.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

N.B. : Le candidat traitera l'un des deux sujets, au choix.

Exercice n° 1

Dans quelle mesure la mondialisation des échanges et la globalisation financière sont-elles favorables aux économies émergentes ?

SUJET N° 2

N.B. : Dans l'équilibre de ses réponses, le candidat devra observer le barème.

MICROECONOMIE

EXERCICE : 3 points.

On étudie le comportement d'une entreprise en situation de monopole confrontée à une courbe de demande inverse donnée par $p(y) = 12 - y$ et sa courbe de coût est donnée par $c(y) = y^2$

1. Quel est le niveau de production qui maximise son profit ?
2. Supposons que le gouvernement décide de taxer ce monopoleur de telle sorte qu'il ait à payer 2 francs au gouvernement pour chaque unité vendue. Compte tenu de cette forme de taxation, à combien s'élèvera sa production ?
3. Supposons à présent que le gouvernement impose une taxe forfaitaire d'un montant de 10 francs sur le profit du monopoleur. Quelle sera sa production ?

EXERCICE : 4 points.

L'élasticité-prix de la demande de la côtelette de bison est constante et égale à -1. Quand le prix de la viande est 10 l'unité, la quantité totale demandée est de 6.000 unités.

1. Ecrivez l'équation de la fonction de demande. Faîtes un graphique.
2. Si l'offre est parfaitement inélastique et égale à 5.000 unités, quel est le prix d'équilibre ? Représenter la courbe d'offre. Soit *E* l'équilibre.
3. Supposons que la courbe de demande se déplace vers l'extérieur de 10%. Ecrivez la nouvelle équation de la fonction de demande. Supposons que la courbe d'offre reste verticale mais se déplace vers la droite de 5%. Quel est le nouveau prix d'équilibre ? Quelle est la nouvelle quantité d'équilibre ?
4. De quel pourcentage, approximativement, le prix a-t-il augmenté ? Représentez les nouvelles courbes d'offre et de demande sur votre graphique.

QUESTION : 2 points.

La relation de Slutsky.

MACROECONOMIE

EXERCICE : 6 points.

Dans une branche produisant des biens de consommation, le coefficient de capital est stable et égal à deux. La demande est restée stable et égale à 1000 durant toutes les années antérieures à l'année t*1*. Elle évolue ensuite de la façon suivante : 1.200 en t1, 1.100 en t*2, 800* en t*3* et 1.000 en t4.

Partie 1

On suppose que chaque année, il faut remplacer un cinquième du capital engagé initialement. L'investissement de remplacement est constant.

1. Déterminez l'investissement de remplacement et l'investissement net. On suppose tout d'abord que les équipements qui sont retirés de la production quand la demande diminue, ne sont pas réemployés.

2. Mettez en évidence pour chaque période l'évolution de la demande et le capital requis afin de répondre à cette demande (la production est supposée s'ajuster instantanément). En le comparant au capital disponible, déduisez-en l'évolution de l'investissement total (construire pour cela un tableau représentant les évolutions de la production demandée (et ses variations), du capital requis, du capital disponible, du capital oisif, de l'investissement de remplacement, de l'investissement net, de l'investissement total et les variations de ce dernier. Commentez ces évolutions de période en période en justifiant vos calculs.

3. Représentez, sur un même graphique, les variations de l'investissement total et les variations de la demande. Quel principe est ainsi mis en évidence ? Décrivez-le en vous appuyant sur l'exemple proposé.

4. Déterminez l'évolution de l'investissement si le coefficient de capital double. Qu'en concluez-vous quant au principe d'accélérateur ?

Partie 2

On suppose maintenant que les entreprises décident de remplacer chaque année un cinquième des équipements en usage l’année précédente.

1. Calculez l’investissement de remplacement.
2. Cette hypothèse vous paraît-elle plus réaliste que celle de la partie précédente ?

QUESTION : 4 points.

Le chômage dans la théorie néoclassique.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

La Mondiale des Jeux désire lancer un nouveau jeu dans les prochaines semaines. Le Directeur Général confie à son bureau d'études, composé de 9 agents, le soin de lui faire des propositions. Chaque membre réalise une proposition de nouveau jeu, chacune des propositions est résumée ci-dessous. A partir de ces éléments, il vous est demandé de rédiger une courte note, argumentée d'indicateurs ou de tableaux statistiques, permettant aux membres du conseil d'administration de la Mondiale des jeux de choisir parmi les 9 projets.

Pour vous aider, vous êtes en particulier invité à calculer, pour chaque jeu proposé :

- la probabilité qu'a un joueur de récupérer plus de 5 fois sa mise ;
- la probabilité qu'a un joueur de récupérer plus de 10 fois sa mise ;
- la proportion de billets gagnants ;
- la probabilité qu'un joueur perde ;
- un ratio permettant de comparer la marge financière dégagée ;
- un ratio permettant de comparer le gain moyen que peut attendre un joueur ;
- …..

Jeu 1 – Banco

Mise initiale : 5 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 76.816 lots d'une valeur totale de 1.133.600 francs pour chaque bloc de 360.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
15	5000	75000
10	2000	20000
25	1000	25000
600	500	300000
566	100	56600
1440	50	72000
6120	20	122400
24480	10	244800
43560	5	217800
76816		1133600

Jeu 2 – Morpion

Mise initiale : 5 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 74.334 lots d'une valeur totale de 1.133.500 francs pour chaque bloc de 360.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
15	5000	75000
10	2000	20000
20	1000	20000
129	500	64500
1800	100	180000
6120	50	306000
27360	10	273600
38880	5	194400
74334		1133500

Jeu 3 – France 98

Mise initiale : 20 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 105.821 lots d'une valeur totale de 5.398.600 francs pour chaque bloc de 500.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
1	200000	200000
2	100000	200000
5	20000	100000
5	10000	50000
40	1000	40000
850	500	425000
4918	200	983600
10000	100	1000000
30000	40	1200000
60000	20	1200000
105821		5398600

Jeu 4 – Tac o Tac

Mise initiale : 20 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 287.380 lots d'une valeur totale de 17.395.400 francs pour chaque bloc de 1.500.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
1	2000000	2000000
3	200000	600000
6	20000	120000
18	10000	180000
465	2000	930000
860	1000	860000
2500	400	1000000
13527	200	2705400
66000	60	3960000
48000	400	1920000
156000	20	3120000
287380		17395400

Jeu 5 – Goal

Mise initiale : 5 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 101.817 lots d'une valeur totale de 1.574.600 francs pour chaque bloc de 500.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
5	10000	50000
13	2000	26000
13	1000	13000
464	500	232000
10822	50	541100
5000	20	100000
37000	10	370000
48500	5	242500
101817		1574600

Jeu 6 – Black Jack

Mise initiale : 10 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 324.486 lots d'une valeur totale de 8.349.500 francs pour chaque bloc de 1.440.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
7	100000	700000
52	10000	520000
1064	1000	1064000
1763	500	881500
28800	50	1440000
81600	20	1632000
211200	10	2112000
324486		8349500

Jeu 7 – Solitaire

Mise initiale : 10 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 128.441 lots d'une valeur totale de 2.899.250 francs pour chaque bloc de 500.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
2	50000	100000
5	20000	100000
5	10000	50000
10	5000	50000
94	500	47000
4720	100	472000
3605	50	180250
10000	30	300000
50000	20	1000000
60000	10	600000
128441		2899250

Jeu 8 – Bingo

Mise initiale : 10 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 304.793 lots d'une valeur totale de 9.297.650 francs pour chaque bloc de 1.500.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
7	25000	175000
12	2500	30000
966	275	265650
3808	250	952000
15000	50	750000
285000	25	7125000
304793		9297650

Jeu 9 – Astro

Mise initiale : 10 F

Les lots attribués aux tickets gagnants sont répartis par la voie du sort dans la proportion de 122.944 lots d'une valeur totale de 2.999.250 francs pour chaque bloc de 500.000 tickets, conformément au tableau ci-après :

Nombre de lots	Montant du lot (en francs)	Total (en francs)
1	70000	70000
2	30000	60000
7	7000	49000
229	700	160300
220	300	66000
8485	70	593950
43000	30	1290000
71000	10	710000
122944		2999250

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2001

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

Comparez la Passion et la Volonté.

SUJET N° 2

Peut-on qualifier d'inhumaines certaines actions de l'homme et pourquoi ?

SUJET N° 3

L'inégalité des hommes rend-elle impossible l'égalité des citoyens ?

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2001

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Une primitive de la fonction f est

$$\frac{5}{4}x-\frac{5}{8}\frac{1}{2x-3}+\frac{7}{4}\ln|2x-3|+\text{constante}$$

Exercice n° 2

- Pas de problème si l'on indique que la somme de deux entiers naturels est un entier naturel
- $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- La suite (u_n) diverge

Exercice n° 3

1) Soit (x,y,z) les coordonnées du vecteur u dans la base canonique de R^3 et (x',y',z') les coordonnées de ce même vecteur dans la base composée des vecteurs a,b,c. On a :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}z \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z \\ z' = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{1}{5}z \end{cases}$$

2) Dans la base composée des vecteurs a,b,c l'endomorphisme f s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 18 & 47 & -7 \\ 14 & 6 & -11 \\ 11 & 39 & -19 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4

- Si m est différent de 3 alors le système admet une solution unique :

$$\begin{cases} x = \frac{p+1}{m-3} \\ y = \frac{5m+4p-2mp-17}{5(m-3)} \\ z = \frac{15m-8p-mp-56}{5(m-3)} \end{cases}$$

- Si m est égal à 3 et si p est différent de –1, le système n'admet pas de solution
- Si m est égal à 3 et si p est égal à –1, l'ensemble des solutions est une droite affine d'équation :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}(7 - 2x) \\ z = \frac{1}{5}(16 - 11x) \end{cases}$$

Exercice n° 5

$P(H/B) = \frac{18}{33}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2001

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Un grand nombre d'indicateurs peuvent être proposés par les candidats. L'énoncé leur en proposait certains. Ici, le choix s'arrête à 7 indicateurs : ils doivent être judicieusement choisis afin de permettre les comparaisons entre les jeux proposés. En effet, à la lecture des informations données, il était évident que l'on pouvait difficilement comparer des jeux dont la mise initiale variait de 5 à 20 francs, pour lesquels le nombre de lots variait de 74.334 à 324.486,…

L'indicateur (1) correspond à la proportion financière reversée aux joueurs, c'est-à-dire le rapport entre la masse cumulée des lots reversés et la recette attendue, et ceci par bloc de tickets. Pour le premier jeu, c'est la division de 1.133.600 francs par 5x360.000 (un bloc correspond à 360.000 tickets et la mise à 5 francs) ;

L'indicateur (2) est la probabilité qu'un joueur perde (somme égale à 0). Pour le premier jeu, P(X=0) est égal au rapport entre le nombre de tickets perdants d'un bloc (360.000-76.816) et le nombre de tickets d'un bloc ;

L'indicateur (3) est la proportion de tickets *véritablement* gagnants. En effet, un joueur qui mise une somme de x francs souhaite avoir plus que la somme qu'il a engagée. Aussi, cet indicateur est-il le rapport entre le nombre de tickets gagnants plus que la somme misée sur le nombre total de tickets, ceci pour un bloc de tickets. Pour le premier jeu, c'est la division de 33.256 tickets (76.816-43.560) par 360.000 tickets ;

L'indicateur (4) est la probabilité qu'un joueur gagne plus de 5 fois la mise initiale. Pour le premier jeu, c'est donc P(X$\geq$25 francs) qui vaut 15+10+25+600+566+1.440 divisé par 360.000 ;

L'indicateur (5) est la probabilité qu'un joueur gagne plus de 10 fois la mise initiale. Pour le premier jeu, c'est donc P(X$\geq$50 francs) qui vaut 15+10+25+600+566+1.440 divisé par 360.000 ;

L'indicateur (6) correspond au ratio entre la mise initiale et la somme maximale pouvant être gagnée. Pour le premier jeu, c'est le rapport entre 5.000 francs (gain maximum) et 5 francs (mise initiale) ;

L'indicateur (7) correspond au gain moyen obtenu par un joueur qui sait qu'il va gagner (plus que sa mise) pour une mise de 1 franc. C'est donc le rapport entre les gains redistribués et le nombre de tickets gagnants, divisé ensuite par le montant de la mise initiale pour pouvoir comparer les différents jeux. Pour le premier jeu, ce rapport est donc la division de : 915.800francs(75.000+20.000+25.000+30.0000+56.600+72.000+122.400+244.800) par 33.256 tickets, divisé ensuite par 5 (mise initiale).

Le tableau de synthèse ci-dessous donne les résultats attendus.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Banco	63%	79%	9%	0,74%	0,74%	X1000	5,5
Morpion	63%	79%	10%	2,25%	2,25%	X1000	5,3
France 98	54%	79%	9%	3,16%	1,16%	X10000	4,6
Tac o tac	58%	81%	9%	1,16%	1,16%	X100000	5,4
Goal	63%	80%	11%	2,26%	2,26%	X2000	5,0
Black Jack	58%	77%	8%	2,20%	2,20%	X10000	5,5
Solitaire	58%	74%	14%	1,69%	0,97%	X5000	3,4
Bingo	62%	80%	20%	1,32%	0,32%	X2500	3,1
Astro	60%	75%	10%	1,79%	0,09%	X7000	4,4

Commentaires :

Il n'y a pas de corrigé-type pour ce sujet. Toutefois, on pouvait avancer :

1) que la rentabilité financière, toutes choses égales par ailleurs (coût de production, de distribution,…) pour la société Mondiale des jeux est plus élevée avec les jeux France 98, Tac o tac, Black Jack et Solitaire qu'avec les autres ;

2) que les jeux Banco et Morpion sont assez proches ;

3) que le jeu Tac o tac permet un gain exceptionnel, plus de 100 000 fois sa mise ;

4) que le jeu Bingo, si les chances de gagner sont fortes, donne alors un gain médiocre (cet argument étant aussi vrai pour le Solitaire) ;

5) que le jeu Goal est assez équilibré et représente pour le joueur un assez bon compromis.

ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR -SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIES A et B

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des 3 sujets au choix.

SUJET N° 1

Pourquoi suffit-il d'un tableau noir et d'un morceau de craie pour établir des vérités mathémathiques, alors que le physicien a besoin d'observer et d'expérimenter ?

SUJET N° 2

Expliquer et apprécier cette assertion que "la liberté d'indifférence est le plus bas niveau de la Liberté".

Descartes "Méditations"

SUJET N° 3

Un philosophe a défini l'intelligence "la fonction qui adapte des moyens à des fins". Cette formule vous paraît-elle présenter les conditions d'une bonne définition ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Dans $\mathbf{R}^3$ muni de la base canonique, considérons les vecteurs $u_1=(1,3,0)$; $u_2=(0,4,2)$; $u_3=(2,-1,0)$. Soient B la base de $\mathbf{R}^3$ constituée par les vecteurs u_1, u_2 et u_3 et f une application linéaire définie de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ par :

$f(x,y,z)=(3x-y,y,x+y+z)$

Déterminer la matrice M représentant f dans la base B.

Exercice n° 2

On donne la matrice A ci-dessous où k appartient à l'ensemble des nombres réels. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 2-k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 3

Etudier la suite (u_n) définie par récurrence par la relation : $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ (où n appartient à l'ensemble des entiers naturels) selon les valeurs de u_0.

Exercice n° 4

Soit $I_k = \int_0^2 x^{7-k}(x-2)^{7+k}\,dx \;\; où \;\; k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Trouver une relation entre I_k et I_{k+1} puis calculer I_7. En déduire I_0.

Exercice n° 5

Déterminer les paramètres réels a et b de façon que le premier terme (plus petite puissance de x) du développement limité de la fonction f soit d'ordre le plus élevé possible, pour x voisin de zéro, où :

$$f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$$

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

N.B. : Le candidat traitera l'un des deux sujets au choix.

SUJET n° 1

Les Unions Economiques et Monétaires dans le contexte de la mondialisation des échanges et de la globalisation financière.

SUJET n° 2

N.B. : *Dans l'équilibre de ses réponses, le candidat devra observer le barème.*

MICROECONOMIE

QUESTION : 3 points.

Après avoir rappelé les hypothèses de base d'un modèle de concurrence pure et parfaite, vous présenterez une analyse critique de chacune d'elles.

EXERCICE I : 3 points.

Des études économétriques portant sur la période précédant la guerre civile américaine (1820-1860) indiquent une élasticité-prix de la demande de coton de la part des Etats-Unis approximativement égale à – 1. Du fait de la rapide croissance de l'industrie textile britannique, on a estimé que la courbe de demande pour le coton américain s'était déplacée vers la droite d'environ 5% par an durant toute cette période.

1. Si, pendant cette période, la production de coton des Etats-Unis avait augmenté de 3% par an, quel aurait été approximativement le changement du prix du coton pendant cette période ?

2. Supposons une élasticité-prix constante de – 1 et supposons que lorsque le prix est de 20, la quantité produite est aussi de 20. Tracez la courbe de demande de coton. Quelle est la recette totale quand le prix est de 20 ? Quelle est la recette totale quand le prix est de 10 ?

3. Si le changement dans la quantité totale de coton offerte par les Etats-Unis était interprétée comme un déplacement le long d'une courbe d'offre de long terme à pente croissante, quelle serait l'élasticité de l'offre ? (indication : de 1820 à 1860, la quantité a augmenté d'environ 3% par an). Quel est le pourcentage annuel d'augmentation du prix ?

EXERCICE II : 4 points.

On considère une entreprise qui produit deux biens, notés [Y_1] et [Y_2], à partir de deux facteurs de production le travail et le capital, notés respectivement [X_1] et [X_2]. Pour produire n unités de bien [Y_1], il faut au moins n unités de travail et 12n unités de capital. Pour une production de n unités de bien [Y_2], les besoins en travail et capital sont respectivement de n unités de [X_1] et de 48n unités de [X_2].

1. Ecrire les fonctions de production associées aux techniques qui permettent de produire les biens [Y_1] et [Y_2]. Quelle est la forme des rendements d'échelle dans l'entreprise ?

2. On admet que l'entrepreneur dispose de 100 unités de bien [X_1] et de 2400 unités de bien [X_2]. Représenter dans le plan (Y_1, Y_2) l'ensemble des productions réalisables dans l'entreprise.

3. Si l'entrepreneur a un comportement concurrentiel sur les marchés des biens [Y_1] et [Y_2] et si les prix de vente de ces biens sont respectivement 1 et 2, déterminer la décision de production. Quelle serait cette décision si les prix de vente étaient respectivement 2 et 1 ?

MACROECONOMIE

QUESTION : 4 points.

La baisse des taux d'intérêt comme instrument de relance globale : portée et limites.

EXERCICE : 6 points.

On suppose que l'économie d'un pays peut-être représentée par un modèle à quatre secteurs : ménages, sociétés, Etat, extérieur.

L'examen de leurs relations fait apparaître les éléments suivants en milliards de francs :

- Consommation finale des ménages : C = 498
- Revenu d'équilibre : Ye = 750
- Importations totales : M = 300
- Taux marginal d'imposition : t = 0,15
- Propension marginale à épargner : s = 0,4
- Investissement autonome : I_0 = 100
- Taux de transfert : r = 0,05
- Propension marginale à importer : m = 0,2
- Exportations autonomes : X_0 = 300
- Transferts autonomes : R_0 = 80
- Impôts forfaitaires : T_0 = 100

1. Calculer le montant de la consommation autonome, des dépenses publiques autonomes et des importations autonomes. Quelle est la situation du budget de l'Etat ?

2. On suppose que le niveau de la demande correspondant au plein emploi est égal à 800 milliards de francs. Pour éliminer le sous-emploi, de combien doit-on :

   a) soit modifier les dépenses publiques autonomes ?
   b) soit, alternativement, faire varier le taux marginal d'imposition (dans ce cas, calculer la situation de la balance commerciale et celle du budget de l'Etat) ?

1. A partir de la situation précédente (celle décrite en 2-b), l'Etat, poursuivant un objectif d'équilibrage de la balance commerciale, cherche à réduire le montant des importations totales. De combien doit-il alors faire varier les importations autonomes pour atteindre cet objectif ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice n° 1

La Régie Urbaine des transports en commun d'une commune a équipé chacun de ses autobus d'un automate programmé pour enregistrer en temps réel des évènements survenus au cours de leurs voyages. Certains évènements sont sauvegardés en mémoire, avec la date et l'heure, et les paramètres du voyage. Un système de transmission radio permet de vider la mémoire à intervalles réguliers vers l'ordinateur central de la société qui conserve ainsi un historique complet de son activité depuis la mise en place du système, il y a 5 ans. On connaît donc par ce système la durée D de chaque voyage effectué depuis son installation, et de façon exacte.

Pour la ligne 47, et pour les 14 derniers jours ouvrés (du lundi au vendredi) du mois de février 1997, et à raison d'un départ dans chaque sens toutes les 10 minutes de 6 heures du matin à 21 heures le soir, on dispose des observations de 2.520 voyages. On peut raisonnablement considérer que les caractéristiques de la circulation sur la ligne 47 restent stables tout au long du 1er trimestre 1997.

On a réparti des 2.520 voyages précédents les 1.260 voyages qui se sont effectués dans un même sens suivant la tranche horaire de leur heure de départ, dans le tableau ci-dessous. (On observe qu'aucun voyage ne dure moins de 30 minutes ni plus de 2 heures).

	Durée D du voyage (en minutes)				
Heure H du départ	**30 ✧ D < 60**	**60 ✧ D < 70**	**70 ✧ D < 80**	**80 ✧ D < 120**	**Ensemble**
6h ✧ H < 7h30	34	54	21	17	126
7h30 ✧ H< 9h	16	35	44	31	126
9h ✧ H < 16h30	92	210	218	110	630
16h30 ✧ H < 19h	28	62	80	40	210
19h ✧ H < 21h	67	30	30	41	168
ENSEMBLE	237	391	393	239	1 260

Question n° 1

Calculez la durée moyenne des voyages, puis la durée médiane. Quelle est la signification de ces deux grandeurs ? Pour la moyenne, on utilisera l'approximation du centre de classe. Pour la médiane, on pourra faire une interpolation linéaire.

Représentez graphiquement cette distribution au moyen d'un histogramme. Qu'en pensez-vous ?

Question n° 2

Un indicateur de la dispersion est donné par l'écart interquartile : c'est la différence entre les deux valeurs de la variable étudiée, correspondant l'une -dite 1er quartile- à une fréquence cumulée de 25% et l'autre -dite 3ème quartile- à une fréquence cumulée de 75%.

Il vous est demandé de mesurer la dispersion des durées de voyages ***:***

- en utilisant cet indicateur (on pourra faire une interpolation linéaire)
- puis en utilisant l'indicateur plus traditionnel qu'est l'écart type de la distribution (on pourra utiliser l'approximation de centre de classe).

Question n° 3

Calculez l'heure moyenne de départ, puis l'heure médiane de départ.

Question n° 4

Quelle est l'heure de départ correspondant au 1er quartile ? Celle correspondant au 3ème quartile ? en déduire l'écart interquartile, qui est ici une durée.

Question n° 5

M. Dubus prend l'autobus 47 tous les mardis du mois de mars à 7h40, du départ de la ligne jusqu'au terminus. Comment peut-on évaluer la probabilité qu'il arrive à sa destination avant 9 heures ? Calculez cette évaluation.

Que devient cette probabilité le mercredi, jour où M. Dubus ne peut prendre son bus qu'à 8h10 ?

Question n° 6

Mardi prochain, exceptionnellement, M.Dubus doit être arrivé au terminus du bus pour 8h30. Il se donne un seuil de 10% de chances de ne pas être à l'heure (le “ risque 0 ” l'obligerait à prendre le bus à 6h30, ce qui lui est impossible à cause de ses obligations familiales). Quelle est l'heure limite à laquelle son autobus devra partir pour qu'il soit à l'heure, compte tenu de ce risque de 10% ? (un raisonnement par interpolation linéaire pourra être tenu).

Exercice n° 2

A l'aide des tableaux fournis ci-après, rédiger une note de synthèse portant sur les produits intérieurs bruts régionaux français entre 1982 et 1996.

Pour comprendre les résultats, les éléments suivants vous sont donnés :

Les produits intérieurs bruts (PIB) régionaux résultent de la répartition par région du PIB national en fonction des évaluations régionales de la valeur ajoutée.

Le PIB par habitant est un indicateur conventionnel, calculé en rapportant le PIB régional à la population totale résidant dans la région. Cet agrégat peut être considéré comme un indicateur de la richesse moyenne par habitant d'une région, car la valeur ajoutée ne reste pas nécessairement dans la région. De plus, cet agrégat sous estime les performances économiques des régions qui ont un nombre élevé d'inactifs ou les capacités de celles qui comptent beaucoup de travailleurs frontaliers.

Tableau 1 – Les produits intérieurs bruts (PIB) régionaux entre 1982 et 1996

Région	PIB en 1996 (en milliards de francs courants)	Taux annuel de croissance du PIB en volume (%)			Poids dans le PIB métropolitain (en %)	
		1982-1996	1982-1989	1989-1996	1982	1996
Alsace	233	2,2	2,7	1,8	2,9	3,0
Aquitaine	346	1,8	2,2	1,3	4,6	4,4
Auvergne	143	1,4	2,0	0,8	2,0	1,8
Bourgogne	190	1,6	2,3	0,9	2,6	2,4
Bretagne	321	2,1	2,3	1,9	4,1	4,1
Centre	291	1,7	2,8	0,7	3,9	3,7
Champagne-Ardenne	165	1,3	1,8	0,8	2,4	2,1
Corse	28	1,8	2,2	1,4	0,4	0,4
Franche-Comté	134	2,1	2,9	1,3	1,7	1,7
Basse-Normandie	164	2,5	2,7	2,3	2,0	2,1
Haute-Normandie	245	1,7	1,9	1,5	3,2	3,1
Languedoc-Roussillon	229	2,2	2,5	2,0	2,8	2,9
Limousin	76	1,3	1,4	1,3	1,1	1,0
Lorraine	266	1,4	1,6	1,2	3,7	3,4
Midi-Pyrénées	284	2,2	3,0	1,4	3,5	3,6
Nord-Pas-de-Calais	444	1,4	1,6	1,2	6,1	5,6
Pays de la Loire	374	2,0	2,5	1,6	4,7	4,7
Picardie	205	1,7	2,0	1,5	2,8	2,6
Poitou-Charentes	176	1,8	2,5	1,1	2,3	2,2
Provence-Alpes-Côte d'Azur	532	1,7	2,5	1,0	6,6	6,8
Rhône Alpes	733	2,2	2,8	1,5	9,1	9,3
Province	**5579**	**1,9**	**2,4**	**1,4**	**72,9**	**70,9**
Ile-de-France	2289	2,1	2,9	1,4	27,1	29,1
France métropolitaine	**7868**	**1,9**	**2,5**	**1,4**	**100**	**100**

Source : Insee Première n°616 de novembre 1998

Tableau 2 – Disparité des régions selon le PIB par habitant et par emploi

Région	PIB par habitant (en milliers de francs courants)	PIB par emploi (en milliers de francs courants)	Emploi / Population (en %)	PIB par habitant (France = 100)		PIB par emploi (France = 100)	
	1996	**1996**	**1996**	**1982**	**1996**	**1982**	**1996**
Alsace	136	357	38	99	101	102	100
Aquitaine	120	324	37	93	89	96	91
Auvergne	109	298	36	79	81	81	83
Bourgogne	117	318	37	90	87	92	89
Bretagne	112	305	37	82	83	85	85
Centre	119	321	37	93	88	92	90
Champagne-Ardenne	122	327	37	96	90	98	91
Corse	106	318	33	79	79	98	89
Franche-Comté	120	327	37	84	89	87	91
Basse-Normandie	115	302	38	79	85	79	84
Haute-Normandie	137	380	36	106	101	107	106
Languedoc-Roussillon	102	310	33	79	76	93	87
Limousin	105	283	37	78	78	78	79
Lorraine	115	335	34	87	85	96	94
Midi-Pyrénées	113	299	38	82	84	86	84
Nord-Pas-de-Calais	111	343	32	84	82	98	96
Pays de la Loire	118	314	38	88	87	89	88
Picardie	110	326	34	85	81	93	91
Poitou-Charentes	108	306	35	79	80	86	85
Provence-Alpes-Côte d'Azur	119	351	34	94	88	105	98
Rhône Alpes	130	339	38	97	96	95	95
Province	**118**	**327**	**36**	**88**	**87**	**93**	**91**
Ile-de-France	207	463	45	145	153	122	129
France métropolitaine	**135**	**358**	**38**	**100**	**100**	**100**	**100**

Source : Insee Première n°616 de novembre 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2002

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

Soit M la matrice représentant f dans la base canonique et P la matrice de passage, on a :

$$M' = P^{-1}MP = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -20 & -40 & 2 \\ 28 & 42 & 7 \\ 10 & -8 & 48 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2

Les valeurs propres sont 3, k-1, 3-k

Si k est différent de 0, 2, 4 alors A est diagonalisable

Si k=0 alors A est non diagonalisable

Si k=2 alors A est diagonalisable

Si k=4 alors A est non diagonalisable

Exercice n° 3

A partir de la représentation graphique y = x^2 – 2x+2, on peut constater et justifier que :

- Si $u_0>2$, la suite est croissante et non majorée donc divergente
- Si $u_0=2$, la suite est stationnaire donc convergente (limite égale 2)
- Si $1<u_0<2$, la suite est décroissante et minorée donc convergente vers 1
- Si $u_0=1$, la suite est stationnaire donc convergente (limite égale 1)
- Si $0<u_0<1$, la suite est décroissante à partir d'un certain rang et minorée donc convergente vers1
- Si $u_0=0$, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang donc convergente (limite égale 1)
- Si $u_0<0$, la suite est croissante et non majorée donc divergente

Exercice n° 4

Par intégration par partie, on montre que :

$$I_{k+1} = \frac{k+8}{k-7} I_k$$

$$I_7 = \frac{2^{15}}{15}$$

$$\text{donc } I_0 = -\frac{7!\ 7!}{15!} 2^{15}$$

Exercice n° 5

En utilisant les développements limités de $(1+x)^m$, de e^x et de $(1+bx)^{-1}$, on obtient le développement limité de la fonction f au voisinage de zéro :

$$f(x) = (1+b-a)x + (\frac{1}{2} - b^2 + ab)x^2 + (\frac{1}{6} + b^3 - ab^2)x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

Pour que le DL soit le d'ordre le plus élevé possible, il faut que :

$1 + b - a = 0$ *et* $\frac{1}{2} - b^2 + ab = 0$

On trouve alors $a = \frac{1}{2}$ *et* $b = -\frac{1}{2}$

$f(x)$ *est alors égal* (au voisinage de 0) *à* $-\frac{1}{12}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2002

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) La moyenne est égale à 71 minutes et la médiane à 70 minutes. La moyenne est la durée qu'auraient tous les voyages s'ils avaient la même durée. La médiane est la valeur de la variable qui coupe la population en 2 : 50% des voyages durent en réalité moins de 70 minutes, 50% des voyages plus de 70 minutes.

2) Par interpolation linéaire, le 1er quartile qui correspond à une fréquence cumulée de 25% est égal à 62 minutes. De la même façon, le 3ème quartile qui correspond à une fréquence cumulée de 75% est égal à 78,1 minutes. En conséquence, l'écart interquartile est de 16,1 minutes.

En calculant la variance, on obtient l'écart type qui est égal à 17,4 minutes.

3) La moyenne est égale à 13h30 et la médiane également.

4) L'écart interquartile est égal à 7h30mn.

5) La probabilité que M.Dubus arrive à sa destination avant 9 heures est de 75,4%

Dans l'hypothèse où M.Dubus ne peut prendre son bus qu'à 8h10, la probabilité qu'il arrive à sa destination avant 9 heures est de 8,5%

6) L'heure limite à laquelle son autobus devra partir pour que M.Dubus soit à l'heure, compte tenu de ce risque de 10%, est 6h50.

Exercice n° 2

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice mais on pouvait évoquer :

- que les PIB régionaux ont augmenté en moyenne de 1,9% par an ;
- que cette augmentation s'est faite plutôt sur la période 1982-1989 (2,5% sur cette période) ;
- que la région Ile-de-France a un poids considérable par rapport aux autres régions ;
- que cette région continue à accroître son écart avec les autres (29% en 1996 contre 27% en 1982) ;
- que 9 régions ont un taux annuel de croissance du PIB supérieur à 2% ;
- que 3 régions (Ile-de-France, Rhône-Alpes, Provence-Alpes-Côte d'Azur) représentent plus de 45% du PIB national de la France métropolitaine ;
- que la "richesse" de la région Ile-de-France se justifie notamment par le fait que le ratio Emploi/habitant est élevé ;
- en termes de PIB par habitant, l'Alsace et la Haute-Normandie arrivent en tête des régions de province ;
- que le PIB par habitant et le PIB par emploi de la province régressent ;

….

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

ORDRE GENERAL

DUREE : 3 HEURES

Les candidats traiteront l'un des trois sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Pourquoi revenir sur le passé ?

SUJET n° 2

La parole suffit-elle à faire échec à la violence ?

SUJET n° 3

Quels peuvent être les effets de la mondialisation sur les spécificités socio-culturelles ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

L'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent donc être traités dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension finie. On désigne par e l'endomorphisme identité et on considère un endomorphisme u tel que $u^2 = u \text{ o } u = u$. Un tel endomorphisme est appelé projecteur. On rappelle qu'un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.

1) Vérifier que u est un projecteur si et seulement si e-u est un projecteur.

2) Montrer que Im(u)=Ker(e-u) et que Ker(u)=Im(e-u) où Im(u) désigne l'image de u et Ker(u) désigne le noyau de u.

3) Montrer que Im(u) et Ker(u) sont deux sous espaces supplémentaires.

Exercice n° 2

1) Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2, J^3, \dots, J^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

2) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$

Mettre la matrice M sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices I et J, I étant la matrice identité d'ordre 3.

Utiliser ce résultat pour calculer M^2, M^3,…, M^n (n appartenant à N^*).

Exercice n° 3

Soit (u_n), n appartenant à N, la suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n - 2} \text{ avec } u_0 = 1$$

1) Calculer les 4 premiers termes de la suite. Que constatez-vous ?

2) Etablir une relation entre u_{n+2} et u_n.

3) En déduire l'équation de récurrence qui lie deux termes successifs d'indice pair. Montrer que les termes d'indice pair forment une suite convergente, dont vous déterminerez la limite.

4) Ecrire, de façon analogue, l'équation de récurrence qui lie deux termes successifs d'indice impair. En déduire que les termes d'indice impair forment une suite convergente, dont vous préciserez la limite.

5) Déduire de ce qui précède, le comportement de la suite (u_n).

Exercice n° 4

Calculer l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_1^2 \ln(x^2 - 1)dx$$

Exercice n° 5

On considère le système d'équations différentielles suivant :

x'=-x-y ; y'=-4y-z ; z'=5z où x, y, z sont des fonctions de la variable réelle t.

1) Ecrire ce système différentiel sous forme matricielle où A est une matrice d'ordre 3 et Y la matrice colonne ayant comme composantes x, y et z.

2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3) Déterminer trois vecteurs propres de A, indépendants, de première composante égale à 1.

4) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base formée des vecteurs propres. Ecrire la relation de similitude entre A et une matrice diagonale D que vous déterminerez.

5) Effectuer le changement $Z=P^{-1}Y$, les composantes de Z étant des fonctions de la variable réelle t. Déterminer les solutions du nouveau système différentiel.

6) Donner les solutions du système initial.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ECONOMIE

DUREE : 4 HEURES

Le candidat traitera l'un des deux sujets suivants au choix.

SUJET n° 1

Dans quelle mesure la régulation par les marchés et le progrès social sont-ils compatibles ?

SUJET n° 2

Dans l'équilibre de ses réponses, le candidat devra observer le barème.

MICROECONOMIE

QUESTION : 3 points.

Les choix intertemporels et l'arbitrage travail - loisir dans la théorie du consommateur.

EXERCICE I : 4 points.

Deux entreprises A et B forment un duopole et sont les seules à offrir un bien homogène X, dont la demande totale est égale à :

$$Q = 800 – 200\, p$$

où p représente le prix du marché.

Les coûts totaux de production des deux entreprises sont les suivants :

- pour A $CT_A\,(Q_A) = Q_A + \mu$ avec $\mu = 0$
- pour B $CT_B\,(Q_B) = Q_B + £$ avec $£ = 0$

1. Déterminer la demande inverse exprimée en fonction des quantités Q_A et Q_B.

2. Déterminer le prix du marché, la quantité produite et le profit lorsque :
   – A est seule sur le marché ;
   – A et B agissent de façon indépendante, chacune comme si elle était en situation de monopole. Quelle est l'influence des coûts fixes ?

1. Déterminer pour chaque entreprise les valeurs fondamentales de l'équilibre de Cournot.

2. Expliciter l'équation des courbes d'iso profit de l'entreprise B en supposant ses coûts fixes nuls.

EXERCICE II : 3 points.

L'entreprise FAC produit un bien X avec le coût total de production suivant :

$$CT\,(q) = 2/3\, q^3 - 5\, q^2 + 18\, q$$

où q représente la quantité de bien produite.

1. Etudier et représenter le coût marginal, le coût moyen et le coût variable moyen.

2. En déduire la courbe d'offre de l'entreprise et la tracer sur le graphique précédent.

3. Si le prix de vente du bien X est de 18, quelle est la production optimale ?
   En déduire la valeur du profit.

4. Déterminer le surplus du producteur après en avoir donné une définition.

MACROECONOMIE

QUESTION : 4 points.

Les dévaluations sont-elles des instruments efficaces pour lutter contre le chômage ?

EXERCICE : 6 points.

Soit une économie sans progrès technique dans laquelle la population active croît à un taux constant n et où l'épargne est proportionnelle au revenu. La fonction de production présente des rendements marginaux décroissants pour le capital.

1. Qu'est ce que le sentier de croissance équilibré (ou stationnaire) ?
2. Si, pour une raison quelconque, l'économie est en dessous de son taux de croissance de long terme, quels ajustements ont lieu pour retourner à l'équilibre ?
3. Quelle différence y a-t-il dans l'analyse si le progrès technique augmentant, l'offre de travail se produit à un taux t ?
4. Qu'implique pour le taux de croissance relatif de long terme des économies le fait que toutes aient accès à la connaissance technique ?
5. Quels facteurs peuvent entraver le processus décrit au point 4 ?
6. Expliquer en quoi des externalités relatives au capital humain et physique peuvent affecter la croissance ?
7. Quel rôle peut jouer le gouvernement dans le processus de croissance ?

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE

ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

ABIDJAN

AVRIL 2003

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B

OPTION ECONOMIE

COMPOSITION D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

DUREE : 2 HEURES

Exercice n° 1

Une filiale de l'entreprise Gamma avait au 1er janvier 1995 1000 salariés permanents. Trois ans plus tard, au 1er janvier 1998, il ne restait plus sur ces 1000 salariés que 879 d'entre eux. 121 personnes ont quitté l'entreprise pour des raisons de retraite ou de convenances personnelles. La répartition de ces salariés par niveau est donnée dans le tableau ci-dessous.

Situation au 1er janvier 1998 des salariés déjà présents au 1er janvier 1995

1/1/98 1/1/95	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	41	0	0	9	50
Agent de maîtrise	6	132	0	12	150
Agent d'exécution	0	20	680	100	800
Total	47	152	680	121	1000

1) Calculez, pour chaque niveau en 1995, les probabilités pour qu'un individu pris au hasard et ayant en 1995 le niveau considéré se retrouve en 1998 dans l'une des 4 situations considérées (distribution marginale).

2) Peut-on dire que le niveau de classification ait une influence sur les départs ?

3) Au bout de combien de périodes triennales plus d'un employé sur deux, parmi ceux présents au 1er janvier 1998, aura quitté l'entreprise si le taux de départs observé se maintient ?

4) En supposant que les distributions marginales observées soient stables au cours du temps et qu'en outre au 1er janvier 1998 l'entreprise ait 50 cadres, 175 agents de maîtrise et 920 agents d'exécution : quels seront, en l'absence d'embauche, les effectifs de l'entreprise par niveau au 1er janvier 2001 et au 1er janvier 2004 si l'on raisonne en espérance mathématique ?

Exercice n° 2

A partir des tableaux joints en annexe, il vous est demandé de rédiger un article de 30 lignes maximum sur les inégalités entre les hommes et les femmes sur le marché du travail en France, en intégrant au moins 5 critères.

Annexe 1 - Taux d'activité par tranche d'âge des femmes et des hommes de 1975 à 2001

	Année :																										
	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
femmes																											
Ensemble	42,3	42,8	43,5	43,3	44,2	44,4	44,7	45,1	45,0	45,4	45,4	46,0	45,8	45,6	45,8	45,9	46,0	46,4	46,8	47,0	47,2	47,6	47,2	47,6	47,9	48,2	48,3
15 - 24 ans	45,7	45,9	45,6	44,4	44,6	43,3	42,7	42,3	41,4	41,1	40,3	39,7	38,7	36,1	35,2	33,1	31,2	30,6	29,3	27,8	26,7	25,9	24,5	25,0	24,6	26,0	26,5
25 - 49 ans	58,9	60,5	62,1	62,7	64,5	65,2	66,1	67,6	68,9	70,0	70,8	72,4	72,2	72,9	73,4	74,3	75,1	76,1	77,4	77,8	78,3	78,7	78,2	78,7	79,1	79,3	79,6
50 -59 ans	49,4	49,5	50,4	49,7	50,3	51,7	52,4	51,9	50,3	50,5	50,3	51,0	52,0	52,7	53,2	53,7	54,5	55,2	55,8	57,1	59,3	61,2	62,4	63,2	64,9	65,0	64,8
60 ans et plus	11,5	10,3	9,4	8,1	7,6	7,8	7,8	7,3	6,9	6,9	6,5	6,2	6,0	5,8	5,8	5,3	5,0	4,7	4,6	4,5	4,2	4,2	3,9	3,7	3,6	3,4	3,3
hommes																											
Ensemble	72,6	72,1	71,8	71,2	71,2	71,1	70,4	69,7	68,7	68,0	67,7	67,2	66,5	65,7	65,5	64,3	63,8	63,6	63,0	62,7	62,3	62,7	62,3	62,0	62,0	61,9	61,8
15 - 24 ans	55,7	55,0	54,3	53,0	53,1	52,6	51,2	51,4	50,9	49,3	49,0	47,7	46,3	43,5	42,3	39,6	37,5	37,3	35,1	33,5	32,8	32,4	31,4	30,9	32,1	32,6	33,1
25 - 49 ans	97,0	97,1	96,9	97,0	97,0	97,2	97,0	96,9	96,9	96,6	96,6	96,7	96,7	96,5	96,4	96,2	96,1	95,7	95,5	95,7	95,4	95,6	95,3	95,1	94,7	94,8	94,8
50 -59 ans	89,7	89,2	89,2	88,1	87,9	87,2	86,3	83,8	81,7	80,1	79,7	80,2	78,8	78,7	78,9	78,7	78,8	79,1	79,1	78,8	78,8	81,1	81,7	81,2	81,7	80,8	80,5
60 ans et plus	26,2	23,0	20,4	18,1	16,3	17,3	16,7	15,9	14,2	14,0	13,5	12,0	11,2	10,9	10,4	9,4	8,3	8,0	7,7	7,1	6,5	6,5	5,8	5,6	5,6	5,2	5,0

Source : Insee, enquêtes Emploi.

Annexe 2 - Taux de chômage des femmes et des hommes par tranche d'âge de 1990 à 2001

femmes	Années											
	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
ensemble	12,3	11,8	13,0	13,5	14,6	14,1	14,4	14,4	14,0	13,8	12,0	10,9
15-24 ans	23,9	23,9	26,1	28,4	31,7	32,2	31,9	32,8	30,0	29,7	23,7	21,8
25-39 ans	12,2	11,7	13,4	14,4	15,3	14,8	15,7	15,3	15,3	15,0	12,8	11,9
40-49 ans	8,5	8,5	8,7	9,1	10,6	10,0	10,3	10,4	10,3	10,4	9,8	8,5
50-59 ans	8,7	8,8	9,8	8,8	9,2	9,1	9,1	10,1	9,7	9,8	8,8	7,6
hommes	Années											
	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
ensemble	7,14	7,15	8,01	9,54	10,94	9,88	10,52	10,92	10,27	10,33	8,54	7,21
15-24 ans	15,30	15,73	16,59	21,44	24,14	20,91	22,01	24,51	21,81	24,17	18,40	16,21
25-39 ans	6,73	6,87	7,86	9,55	10,98	9,67	10,64	11,31	10,80	10,40	8,81	7,58
40-49 ans	4,64	4,72	5,26	6,45	8,03	7,79	7,96	7,74	7,49	7,29	6,13	5,08
50-59 ans	6,04	6,03	7,29	7,41	8,19	7,95	8,50	8,62	8,14	8,43	7,00	5,37

Source : Insee, enquêtes Emploi.

Regards sur la parité - Edition 2002

Annexe 3 - Actifs occupés selon le sexe et la catégorie socio-professionnelle (2001)

En milliers

	Femmes	Hommes	Part des femmes en %	% de la population féminine occupée
Agriculteurs	200	414	32,6	1,9
Artisans	161	525	23,5	1,5
Commerçants et assimilés	246	375	39,7	2,3
Chefs d'entreprises de 10 salariés ou plus	22	118	15,5	0,2
Professions libérales	126	199	38,8	1,2
Cadres de la fonction publique	104	199	34,2	1,0
Professeurs, professions scientifiques	407	350	53,8	3,8
Professions de l'information, des arts et des spectacles	93	120	43,5	0,9
Cadres administratifs d'entreprises	330	594	35,7	3,1
Ingénieurs, cadres techniques	123	741	14,2	1,2
Instituteurs et assimilés	523	264	66,5	4,9
Professions intermédiaires de la santé	796	235	77,2	7,5
Clergé, religieux	3	11	20,0	0,0
Professions intermédiaires de la fonction publique	216	177	55,0	2,0
Professions intermédiaires commerciales des entreprises	657	677	49,2	6,2
Techniciens	144	828	14,8	1,3
Contremaîtres, agents de maîtrise	43	470	8,3	0,4
Employés civils de la fonction publique	1542	458	77,1	14,5
Policiers et militaires	47	443	9,6	0,4
Employés administratifs d'entreprises	1654	371	81,7	15,5
Employés de commerce	684	230	74,8	6,4
Personnels des services directs aux particuliers	1262	193	86,8	11,8
Ouvriers qualifiés de type industriel	248	1307	16,0	2,3
Ouvriersqualifiés de type artisanal	146	1370	9,7	1,4
Chauffeurs	38	568	6,2	0,4
Ouvriers qualifiés de manutention	36	398	8,3	0,3
Ouvriers non qualifiés de type industriel	445	807	35,5	4,2
Ouvriers non qualifiés de type artisanal	294	456	39,2	2,8
Ouvriers agricoles	65	181	26,4	0,6
Militaires du contingent	1	26	2,5	0,0
Ensemble	**10653**	**13105**	**44,8**	**100,0**

Source : Insee, enquête Emploi 2001.

Regards sur la parité - Edition 2002

Annexe 4 - Actifs occupés selon le secteur d'activité (2001)

	Femmes (en milliers)	Hommes (en milliers)	Part des femmes (en %)	% de la population féminine occupée
Agriculture, sylviculture et pêche	302	662	31,4	2,8
Industries agricoles et alimentaires	238	374	38,9	2,2
Industries des biens de consommation	363	413	46,8	3,4
Industrie automobile	53	252	17,3	0,5
Industries des biens d'équipement	160	689	18,8	1,5
Industries des biens intermédiaires	383	1 157	24,9	3,6
Energie	52	188	21,7	0,5
Construction	136	1 313	9,4	1,3
Commerce	1 379	1 682	45,1	12,9
Transports	223	848	20,8	2,1
Activités financières	384	333	53,5	3,6
Activités immobilières	167	153	52,2	1,6
Services aux entreprises	1 242	1 827	40,5	11,7
Services aux particuliers	1 287	728	63,9	12,1
Education, santé, action sociale	3 052	1 199	71,8	28,7
Administration	1 228	1 256	49,4	11,5
Ensemble	**10 653**	**13 079**	**44,9**	**100,0**

Source : Insee, enquête Emploi 2001.

Regards sur la parité - Edition 2002

Annexe 5 - Population active occupée selon le statut et la durée du travail

En milliers

	Femmes		Hommes	
	Temps complet	Temps partiel	Temps complet	Temps partiel
Indépendants	332	83	862	50
Employeurs	190	23	768	12
Aides familiaux	129	88	30	16
Intérimaires	154	24	409	19
Apprentis	72	13	150	25
CDD	324	210	327	68
Autres salariés	3992	1856	7817	292
Stagiaires et contrats aidés	101	132	107	68
Salariés état ou collectivités locales	2124	807	1948	110
Ensemble	**7417**	**3235**	**12419**	**660**

Source : Insee, enquête Emploi 2001.

Regards sur la parité - Edition 2002

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2003

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1) Si u o u = u alors u o (u-e) = (u-e) o u = 0, alors (e-u) o (e-u) = (e-u) -u o (e-u) = e-u. la réciproque se vérifie de la même façon.

2) Comme u o (e-u) = 0, Im(e-u) est inclus dans Ker(u). Réciproquement, pour tout x appartenant à Ker(u), u(x)=0 donc x=u(x)+(e-u)(x)=(e-u)(x), ce qui implique que x appartient à Im(e-u). D'où, finalement, Im(e-u)=Ker(u).
En remplaçant u par e-u, on obtient l'autre égalité demandée.

3) Pour tout x appartenant à l'intersection entre Ker(u) et Im(u), on a, en utilisant la question précédente, u(x)=(e-u)(x)=0 donc x=0. De plus, on a, pour tout x appartenant à E, x=u(x)+(e-u)(x). Autrement dit, tout vecteur s'écrit comme la somme d'un élément de Im(u) et d'un élément de Im(e-u). Comme Im(e-u) est égal à Ker(u), tout vecteur de E s'écrit comme combinaison d'un vecteur de Im(u) et de Ker(u). Ces deux sous-espaces sont donc supplémentaires.

Exercice n° 2

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout n supérieur ou égal à 3, J^n est la matrice nulle

2) $M = aI + 3J$. En utilisant la formule du binôme, on obtient, pour tout n supérieur ou égal à 2 :

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 3na^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{9}{2}n(n-1)a^{n-2} & 3na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

Exercice n° 3

1) $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{4}{3}$; $u_4 = \frac{13}{10}$
2) $u_{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4u_n}$
3) Suite croissante majorée par 3/2, donc convergente. La limite est $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
4) Suite décroissante minorée par 0, donc convergente. La limite est $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$
5) Les suites extraites ayant même limite, la suite converge vers la même limite.

Exercice n° 4

En utilisant l'intégration par parties et la décomposition en éléments simples, on obtient la primitive suivante : $I = x\ln(x^2-1) - 2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \text{constante}$

L'intégrale tend vers l'infini quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Pour $a \in \left]1,2\right[$, on calcule $\int_a^2 \ln(x^2-1)dx = 3\ln3+2a-4-(a+1)\ln(a+1)-(a-1)\ln(a-1)$

Quand $a \to 1^+$, $(a-1)\ln(a-1) \to 0$, donc l'intégrale est convergente vers $3\ln3 - 2\ln2 - 2$

Exercice n° 5

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; Soit Y' la matrice colonne ayant comme composantes x', y' et z', on a alors Y'=AY

2) Les valeurs propres de la matrice A sont –1, -4 et 5. A est diagonalisable puisqu'elle a 3 valeurs propres distinctes. A est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.

3) Les trois vecteurs propres de A, indépendants, sont : (1,0,0) (1,3,0) (1,-6,54)

4) $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 54 & -18 & -3 \\ 0 & 18 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) D'après la question 1, on a Y'=AY. Soit Z la matrice colonne ayant comme composantes z_1, z_2 et z_3 et Z' la matrice colonne ayant comme composantes z'_1, z'_2, z'_3 (fonctions dérivées des fonctions z_1,z_2,z_3 par rapport à la variable t),

on a alors Z'=DZ d'où le résultat : $\begin{cases} z_1 = a e^{-t} \\ z_2 = b e^{-4t} \\ z_3 = g e^{5t} \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = a e^{-t} + b e^{-4t} + g e^{5t} \\ y = 3 b e^{-4t} - 6 g e^{5t} \\ z = 54 g e^{5t} \end{cases}$

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

AVRIL 2003

VOIE B

OPTION ECONOMIE

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Situation au 1er janvier 1998 des salariés déjà présents au 1er janvier 1995
Distributions conditionnelles

1/1/98 1/1/95	Cadre	Agent de maîtrise	Agent d'exécution	Parti de l'entreprise	Total
Cadre	0,820	0,000	0,000	0,180	1,000
Agent de maîtrise	0,040	0,880	0,000	0,080	1,000
Agent d'exécution	0,000	0,025	0,850	0,125	1,000
Total	0,047	0,142	0,680	0,121	1,000

2) Le niveau de classification influe sur les départs. En effet, on constate que :

- Les probabilités conditionnelles de l'événement « départ sachant que le salarié avait initialement le niveau i » diffèrent sensiblement selon le niveau.
- Les probabilités de l'événement « départ et niveau i » diffèrent, quelle que soit la catégorie i, du produit des probabilités marginales. Par exemple, on a : P(départ et agent d'exécution) = 0,125 alors que P(départ)xP(agent d'exécution) = 0,0968

3) Il faut observer 440 départs. Sachant que l'on observe par période triennale 121 départs, le nombre n de périodes triennales recherché est solution de l'équation :

$$440 \leq 879(1-0{,}121)^n$$

On trouve n = 6 périodes, soit 18 ans.

4) La répartition trouvée est la suivante :

Tableau prévisionnel des effectifs sans embauche

	1/1/98	1/1/01	1/1/04
Cadre	50	48	46
Agent de maîtrise	175	177	176
Agent d'exécution	920	782	665
Total	1145	1007	887

Exercice n° 2

Pas de corrigé type

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice n° 1

Question 1

Démontrer par récurrence la relation suivante :

$$\forall n \in ?^{*}, 1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Question 2

On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \text{pour tout entier } n \text{ de } N, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + (n+1)^2 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe trois constantes réelles a,b,c telles que la suite (r_n) définie, pour tout entier n de N, par :

$$r_n = an^2 + bn + c$$

vérifie la relation :

$$r_{n+1} = (1/2)\, r_n + (n+1)^2$$

Question 3

On suppose maintenant que a,b,c ont les valeurs trouvées à la question précédente et on pose alors, pour tout entier n de N **:**

$$v_n = u_n - r_n$$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.

b) Calculer le terme général de la suite (v_n) en fonction de n

c) En déduire le terme général de la suite (u_n) en fonction de n

d) La suite (u_n) converge-t-elle ?

Question 4

Calculer, pour tout entier n de N :

$$V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$
$$R_n = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_n$$
$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Exercice n° 2

On considère l'espace vectoriel R^3 muni de sa base canonique B composée des vecteurs e_1, e_2, e_3. Soit f un endomorphisme de R^3, défini par :

$$f(e_1) = - e_1$$
$$f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$f(e_3) = - e_2 - e_3$$

Question 1

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique B de R^3

Question 2

Déterminer des bases de Ker f et de Im f, où Ker f désigne le noyau de f et Im f son image.

Question 3

a) L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

b) Quel est le rang de f ?

Question 4

a) Montrer que la valeur 0 est une valeur propre de la matrice A
b) En déduire un vecteur propre associé à la valeur propre 0
c) Calculer les autres valeurs propres de A
d) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

Question 5

Soit la famille de vecteurs B' composée des vecteurs u_1, u_2, u_3 de R^3 définis par : $u_1 = - e_2$; $u_2 = e_1 + e_3$; $u_3 = e_1$

a) Montrer que cette famille forme une base de R^3
b) Ecrire la matrice P de passage de la base B à la base B'
c) Calculer P^{-1}
d) En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base B'
e) Quel est le rang de la matrice A' ?

Exercice n° 3

Question 1

Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction :

$$g(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - x$$

Question 2

Même question pour la fonction :

$$h(x) = e^{3x} - 3e^{x} + 2$$

Question 3

Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$

Exercice n° 4

En fonction du paramètre m réel, déterminer les points stationnaires de la fonction f ainsi définie **:** $f(x, y, z) = x^2 - yz^2 - xy^2 + 2mxy$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans une société, quelles sont les conditions de la réduction des inégalités entre les hommes et les femmes ?

Sujet n° 2

L'homme moderne s'est-il trop éloigné de la nature ?

Sujet n° 3

Les découvertes techniques contribuent-elles à renouveler les questions morales ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Libéralisation des échanges et croissance économique dans les économies contemporaines.

Sujet n° 2

Le sujet n° 2 est constitué de deux parties (microéconomie et macroéconomie) qui figurent en pages 2 et 3 respectivement.

MICROÉCONOMIE

Cette première partie comporte une question et deux exercices. Elle est globalement notée sur 10.

QUESTION (4 points)

Le surplus du consommateur.

EXERCICE I (3 points)

La production d'une entreprise de taxis «brousse» est mesurée par le nombre *n* de kilomètres parcourus chaque jour. Ses coûts de production comprennent :

- le coût salarial du conducteur, soit *w* Francs CFA de l'heure,
- le coût du carburant diesel, soit *p* Francs CFA par litre,
- la consommation de carburant *c* par kilomètre, fonction de la vitesse *v* du taxi : nous supposons qu'elle puisse être représentée par $c = A + Bv$, A et B étant deux constantes.

1) Déterminer la fonction de coût variable total de l'entreprise lorsque celle-ci dispose d'un nombre illimité de taxis.
2) Donner l'expression de la fonction de coût lorsque l'entreprise ne dispose que d'un taxi dont l'utilisation ne peut excéder 10 heures par jour.

EXERCICE II (3 points)

Une entreprise a pour fonction de production $y = k^{1/3} l^{1/3}$ avec deux facteurs de production, du capital en quantité *k* et du travail en quantité ***l***.

Les prix unitaires des facteurs sont égaux à 1 et le prix du bien égal à *p*.

1) Déterminer la fonction de coût total. En déduire la fonction d'offre de l'entreprise et la demande pour chaque facteur en fonction du prix du bien.
2) Déterminer la fonction de demande de chaque facteur et la fonction d'offre de l'entreprise en passant par la maximisation du profit.

MACROÉCONOMIE

Cette seconde partie comporte une question et un exercice. Elle est globalement notée sur 10.

QUESTION (4 points)

Les causes de l'inflation dans les économies en développement.

EXERCICE (6 points)

Une économie est représentée par le modèle keynésien simplifié suivant :

Fonction de consommation : $C = c(Q - \overline{T}) + C_0 \quad c = 0,6$

Fonction d'investissement : $I = aQ + I_0 \quad a = 0,2$

Fonction d'importations : $M = mQ + M_0 \quad m = 0,2$

Équilibre global : $Q = C + I + \overline{G} + \overline{X} - M$

C_0, I_0, M_0, c, a, et m sont des constantes, $\overline{G}$, $\overline{T}$ et $\overline{X}$ des variables exogènes (respectivement les dépenses publiques, la fiscalité, les exportations), les deux premières étant des instruments de politique économique.

A. On suppose qu'à la suite d'un choc, la consommation se réduit de 10 milliards de Francs CFA au profit de l'épargne.

1) Calculer l'impact de ce choc sur les variables endogènes. Expliquer les canaux de transmission de ce choc.
2) Quelles mesures de politique économique permettraient de maintenir le niveau initial de production ?

B. Politique budgétaire :

1) Calculer l'impact sur l'équilibre des biens et services d'un accroissement des dépenses publiques de 10 milliards de Francs CFA financé par déficit.
2) Calculer l'impact d'un accroissement de dépenses identique financé par la fiscalité. Comparer aux résultats précédents ; commenter.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice n° 1

Dans une centrale d'achats, pour chaque livraison effectuée, on a noté le nombre de kilomètres parcourus. Le tableau ci-dessous est un résumé des observations faites au cours d'une année.

Parcours de livraison (en kilomètres)	Nombre de livraisons
De 0 à 6	60
de 6 à 12	360
de 12 à 18	520
de 18 à 24	620
de 24 à 30	710
de 30 à 36	780
de 36 à 42	650
de 42 à 48	600
de 48 à 54	400
de 54 à 60	100

Question 1

Déterminer, par le calcul, le pourcentage de livraisons dont le kilométrage est :

a) inférieur à 24 kilomètres

b) compris entre 12 et 36 kilomètres

Question 2

a) Calculer la moyenne arithmétique du parcours de livraison.
b) Calculer le coût moyen d'une livraison sachant que le prix du kilomètre parcouru est facturé 1,6748 euros.
c) Les calculs précédents ont été faits pour l'année 2001. En 2002, le prix par kilomètre parcouru a diminué de 2% et le nombre moyen de kilomètres par livraison a augmenté de 5%, calculer le coût moyen d'une livraison en 2002 et comparer avec 2001.

Question 3

Déterminer la médiane du parcours de livraison à partir de ce tableau.

Exercice n° 2

Le nombre de places offertes dans les crèches en 1946 était de 3813. Pour l'année 1986, ce nombre atteignait 57937.

Question 1

Donner le taux d'accroissement annuel moyen de la variable étudiée.

Question 2

En 1975, l'indice du nombre de places offertes dans les crèches, calculé sur la base 100 en 1986, était 49,3. Donner le nombre de places offertes en 1975.

Exercice n° 3

A partir des 4 tableaux fournis en annexe, dresser un panorama de l'offre médicale (nombre de lits, de médecins, etc.) en France en la rapprochant de la demande (population, nombre de décès, etc...).

Annexe 1	Hospitalisation court séjour : Lits installés au 1.1.2000				
	Total		Répartition (pour 100 000 hab.)		
	nombre	pour 100 000 hab.	Medecine	Chirurgie	Gynéco-Obstétrique
Alsace	7 883	451	228	177	46
Aquitaine	12 938	443	209	196	38
Auvergne	5 758	439	208	193	38
Bourgogne	7 373	457	238	177	43
Bretagne	11 462	393	197	157	39
Centre	9 014	368	181	150	38
Champagne-Ardenne	5 901	440	213	181	46
Corse	1 276	489	239	201	**49**
Franche-Comté	4 726	422	195	179	48
Île-de-France	47 501	433	197	191	45
Languedoc-Roussillon	9 725	420	210	177	**33**
Limousin	3 547	**499**	**258**	**206**	35
Lorraine	11 401	493	254	192	47
Midi-Pyrénées	10 530	410	201	174	34
Nord - Pas-de-Calais	15 594	389	182	158	**49**
Basse-Normandie	6 377	447	224	174	**49**
Haute-Normandie	6 375	**357**	**168**	147	41
Pays-de-la-Loire	11 905	367	175	153	39
Picardie	6 765	363	182	**134**	48
Poitou-Charentes	5 895	358	171	150	36
Provence-Alpes-Côte d'Azur	20 053	442	215	188	38
Rhône-Alpes	22 784	401	192	168	41
Ensemble province	**197 282**	**413**	**201**	**170**	**41**
Ensemble métropole	**244 783**	**417**	**201**	**175**	**41**
Guadeloupe	1 708	401	210	132	59
Guyane	615	382	187	113	82
Martinique	1 844	481	271	155	55
Réunion	2 007	280	140	94	46
Total France	**250 957**	**415**	**201**	**173**	**42**

Source : Ministère de l'emploi et de la solidarité - DREES

<u>Hospitalisation complète</u> : activité des unités et services qui, accueillant et hébergeant des malades, se caractérisent par un équipement en lits d'hospitalisation, et par des équipes médicales et paramédicales qui assurent le diagnostic, les soins et la surveillance.

Annexe 2	Activités hospitalières du court séjour hospitalier en 1999						
	Entrées totales en hospitalisation complète		Venues en hospitalisation de jour et en chirurgie ambulatoire		Nombre total d'accouchements	Nombre d'IVG	
	Médecine (milliers)	Chirurgie (milliers)	Médecine (milliers)	Chirurgie (milliers)		Total	Pour 10 000 femmes de 15 à 49 ans
Alsace	179,8	162,2	110,3	31,9	22 503	4 891	110
Aquitaine	298,0	293,8	91,3	92,3	31 757	9 040	131
Auvergne	121,8	119,8	26,4	42,4	13 101	3 546	117
Bourgogne	169,8	144,7	62,4	60,7	18 026	3 727	100
Bretagne	262,3	255,3	99,3	94,2	35 245	7 478	109
Centre	202,6	205,2	65,8	75,9	27 541	6 228	107
Champagne-Ardenne	137,8	140,8	57,6	42,8	16 691	3 365	102
Corse	32,3	31,5	6,5	10,5	2 644	1 292	**212**
Franche-Comté	106,9	107,5	25,6	23,7	13 756	3 058	113
Île-de-France	873,8	946,3	496,4	495,2	160 425	55 016	188
Languedoc-Roussillon	212,2	232,0	99,5	98,3	25 492	9 302	172
Limousin	80,6	67,7	21,8	17,5	6 957	1 737	110
Lorraine	275,8	240,2	62,4	49,1	26 633	6 256	109
Midi-Pyrénées	273,1	244,7	95,9	92,4	26 860	8 191	136
Nord - Pas-de-Calais	345,8	342,1	143,9	129,2	55 889	12 447	123
Basse-Normandie	135,4	132,8	28,7	31,8	17 747	3 427	101
Haute-Normandie	133,6	144,8	55,3	53,9	22 440	4 776	107
Pays de la Loire	253,1	284,0	101,8	102,8	40 561	7 432	**95**
Picardie	163,0	138,7	52,5	44,2	23 408	5 137	111
Poitou-Charentes	146,5	150,0	49,3	44,8	17 155	3 935	103
Provence-Alpes-Côte d'Azur	449,1	445,9	271,0	252,6	54 120	20 741	195
Rhône-Alpes	483,8	492,1	169,8	182,0	72 395	18 710	134
Ensemble province	**4 463,3**	**4 375,7**	**1 697,0**	**1 573,0**	**570 921**	**144 716**	**126**
Ensemble métropole	**5 337,1**	**5 322,0**	**2 193,4**	**2 068,1**	**731 346**	**199 732**	**138**
Guadeloupe	34,4	24,9	11,3	3,7	7 448	5 402	466
Guyane	12,0	9,5	3,8	0,0	4 594	1 310	313
Martinique	38,1	29,3	2,8	5,4	5 697	2 529	245
Réunion	53,8	42,5	12,7	13,3	13 961	4 522	230
Total France	**5 475,5**	**5 428,2**	**2 224,0**	**2 090,5**	**763 046**	**213 495**	**143**

Source : Ministère de l'emploi et de la solidarité - Drees (Enquête SAE)

Hospitalisation complète : les entrées totales résultent de la somme des entrées directes dans une unité hospitalière hébergeant les malades, en provenance du domicile, d'un autre établissement ou d'une autre discipline du même établissement (de médecine à chirurgie, par exemple).

Hospitalisation de jour : activité des unités hospitalières qui effectuent pendant la seule journée des investigations spécialisées, des traitements médicaux séquentiels délicats, des interventions chirurgicales courtes ou une surveillance post-thérapeutique particulière (séjours de moins de 24 heures).

Interruptions volontaires de grossesse (IVG) : autorisées par la loi Veil depuis 1975, les IVG doivent faire l'objet d'une déclaration sous la forme d'un bulletin statistique anonyme. L'Institut national d'études démographiques (Ined) est chargé par la loi d'analyser et de publier les résultats issus de l'exploitation de ces bulletins, en liaison avec l'Institut national de la santé et de la recherche médicale (Inserm).

Annexe 3 - Personnels de santé	Médecins au 1.1.2000				Autres personnels au 1.1.2000 (pour 100 000 hab.)				
	Effectifs	Total	Généralistes	Spécialistes	Chirurgiens dentistes	Infirmiers diplômés d'état et autorisés	Infirmiers de secteur psychiatrique	Masseurs-kinésithéra-peutes	Pharmaciens
		pour 100 000 habitants							
Alsace	5 411	312	152	160	78	640	82	68	94
Aquitaine	8 873	305	152	153	80	611	87	90	111
Auvergne	3 482	266	148	118	68	592	110	88	117
Bourgogne	4 099	255	138	116	52	545	95	71	100
Bretagne	8 040	277	144	133	69	572	**148**	93	92
Centre	6 062	248	**127**	122	51	480	66	66	111
Champagne-Ardenne	3 379	252	140	112	56	508	91	**56**	96
Corse	781	300	162	138	81	643	72	117	102
Franche-Comté	2 945	264	138	125	55	582	107	59	102
Île-de-France	43 101	394	180	214	90	575	**64**	111	101
Languedoc-Roussillon	7 711	336	171	165	81	689	78	126	124
Limousin	2 144	302	166	136	54	**760**	125	86	**132**
Lorraine	6 433	278	142	136	63	539	103	64	89
Midi-Pyrénées	8 644	339	167	172	84	721	116	103	111
Nord - Pas-de-Calais	10 734	269	154	114	48	455	69	84	91
Basse-Normandie	3 538	249	131	117	44	553	86	64	**86**
Haute-Normandie	4 424	249	128	121	**42**	458	**64**	57	92
Pays de la Loire	8 112	252	136	116	58	532	101	75	88
Picardie	4 345	**234**	132	**102**	43	**443**	106	61	90
Poitou-Charentes	4 422	270	151	119	54	503	127	70	104
Provence-Alpes-Côte d'Azur	18 534	**411**	**190**	**222**	**95**	689	104	**132**	116
Rhône-Alpes	16 906	299	148	151	69	579	78	100	108
Ensemble province	**139 019**	**292**	**150**	**142**	**65**	**573**	**95**	**87**	**102**
Ensemble métropole	**182 120**	**311**	**156**	**155**	**70**	**573**	**89**	**91**	**102**
Guadeloupe	785	186	102	84	33	355	66	45	54
Guyane	219	139	84	55	25	318	32	27	34
Martinique	762	200	112	88	35	498	66	47	60
Réunion	1 492	211	123	88	50	410	48	84	55
Total France	**185 378**	**308**	**155**	**153**	**69**	**568**	**88**	**90**	**101**

Source : Ministère de l'emploi et de la solidarité - Drees (répertoire Adeli)

Personnels de santé : au 1er janvier 2000, plus de 785 000 professionnels de santé exercent en France (y compris Dom), à titre libéral ou salarié. On compte plus de 185 000 médecins, 41 500 chirurgiens-dentistes, 342 000 infirmiers diplômés d'État (hors secteur psychiatrique), 52 900 infirmiers psychiatriques, 54 400 masseurs-kinésithérapeutes et près de 60 700 pharmaciens. S'y ajoutent sages-femmes, orthophonistes, orthoptistes, etc. Les personnels de santé comprennent aussi les aides-soignantes et agents hospitaliers (non comptabilisés dans le total ci-dessus).

Médecins : sont pris en compte les médecins en activité, du secteur public ou privé, inscrits à l'Ordre des médecins. La loi de 1979 fixe par arrêté le nombre d'étudiants pouvant être admis en deuxième année de médecine, d'odontologie et de pharmacie (numerus clausus). En médecine, le «numerus clausus » était de 4 100 en 2001.

Pharmaciens : en 2000, on recense 23 330 officines pharmaceutiques en France (y compris Dom).

Annexe 4	Population en 1999	Naissances en 1999		Décès en 1999			Espérance de vie à la naissance (en années) en 1999	
	Nombre	Nombre de naissances	Taux brut de natalité (pour 1 000 habitants)	Nombre de décès	Taux brut de mortalité (pour 1 000 habitants)	Mortalité infantile (pour 1 000 enfants nés vivants)	Hommes	Femmes
Alsace	1 734 145	22 369	12,9	14 297	8,2	5,1	75,0	81,6
Aquitaine	2 908 359	31 465	10,8	30 680	10,5	3,9	75,3	82,9
Auvergne	1 308 878	13 481	10,3	14 805	11,3	3,9	74,2	82,3
Bourgogne	1 610 067	17 977	11,2	17 907	11,1	5,2	74,2	82,1
Bretagne	2 906 197	34 861	12,0	30 423	10,4	4,3	73,6	82,0
Centre	2 440 329	28 872	11,8	24 622	10,1	3,9	75,2	82,7
Champagne-Ardenne	1 342 363	16 732	12,5	12 897	9,6	4,3	73,8	82,1
Corse	260 196	2 712	10,4	2 691	10,3	2,6	75,5	82,7
Franche-Comté	1 117 059	13 978	12,5	10 151	9,1	3,7	75,2	82,4
Île-de-France	10 952 011	167 295	**15,3**	74 745	**6,8**	4,7	76,3	83,0
Languedoc-Roussillon	2 295 648	25 786	11,2	24 839	10,8	4,9	75,0	82,2
Limousin	710 939	6 562	**9,2**	9 220	**13,0**	3,2	75,3	82,7
Lorraine	2 310 376	27 203	11,8	20 805	9,0	4,2	74,4	81,6
Midi-Pyrénées	2 551 687	27 639	10,8	26 284	10,3	3,8	**76,6**	83,0
Nord - Pas-de-Calais	3 996 588	55 867	14,0	36 888	9,2	4,5	**72,0**	**80,6**
Basse-Normandie	1 422 193	17 391	12,2	13 490	9,5	3,9	74,6	82,5
Haute-Normandie	1 780 192	23 395	13,1	15 596	8,7	4,5	74,0	82,1
Pays de la Loire	3 222 061	40 803	12,6	28 568	8,8	4,2	75,4	**83,2**
Picardie	1 857 481	25 137	13,5	16 842	9,1	5,6	73,3	81,2
Poitou-Charentes	1 640 068	17 898	10,9	17 729	10,8	3,0	75,5	**83,2**
Provence-Alpes-Côte d'Azur	4 506 151	53 433	11,8	45 888	10,2	3,6	75,4	82,8
Rhône-Alpes	5 645 407	72 482	12,8	46 303	8,2	3,9	76,0	83,1
Ensemble province	**47 566 384**	**576 043**	**12,1**	**460 925**	**9,7**	**4,2**	**74,7**	**82,4**
Ensemble métropole	**58 518 395**	**743 338**	**12,7**	**535 670**	**9,1**	**4,3**	**75,1**	**82,5**
Guadeloupe	422 496	7 352	17,4	2 633	6,2	6,9	73,7	80,8
Guyane	157 213	4 907	31,0	648	4,1	10,2	71,1	77,9
Martinique	381 427	5 766	15,1	2 551	6,7	6,8	75,1	81,5
Réunion	706 300	13 741	19,4	3 795	5,3	6,0	70,4	78,6
Total France	**60 185 831**	**776 548**	**12,9**	**545 297**	**9,1**	**4,4**	**74,9**	**82,4**

Source : Insee (RP90 - RP99- état civil)

Population : toutes les personnes (Français ou étrangers) résidant sur le territoire, à l'exception des personnes en séjour de courte durée (touristes, travailleurs saisonniers) ; elle comprend aussi des personnes momentanément absentes mais appelées à rentrer à plus ou moins brève échéance (militaires en service).

Taux brut de natalité : rapport du nombre de naissances vivantes au cours de l'année à la population totale au milieu de l'année considérée.

Taux brut de mortalité : rapport entre le nombre annuel de décès et la population totale en milieu d'année. Il dépend surtout de la structure par âge de la population.

Mortalité infantile : nombre d'enfants qui meurent avant l'âge d'un an, calculé pour 1 000 naissances vivantes.

Espérance de vie à la naissance : durée de vie moyenne ou âge moyen au décès d'une génération fictive qui aurait tout au long de son existence les conditions de mortalité par âge de l'année considérée.

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

On note P(n) la proposition à démontrer. Il faut et il suffit de montrer que la proposition est vraie au rang n = 1, puis on suppose la proposition vraie au rang n et on doit montrer qu'elle est toujours vraie au rang n+1 (pas de difficultés).

Question 2

On trouve a = 2 ; b = - 4 ; c = 6

Question 3

a) La raison est égale à 1/2 et le premier terme est égal à – 9/2.
Noter que $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

b) $v_n = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $u_n = -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n^2 - 4n + 6$

d) La suite (u_n) diverge.

Question 4

$$V_n = -9\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$R_n = \frac{n+1}{3}\left(2n^2-5n+18\right)$$

$$U_n = V_n + R_n$$

Exercice n° 2

Question 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 2

La dimension de Ker f est 1, une base de Ker f est constituée du vecteur de coordonnées (1,1,1).

On en déduit que la dimension de Im f est 2. Par exemple, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_3)$ forment une base de ce sous-espace vectoriel puisqu'ils sont indépendants.

Question 3

a) L'endomorphisme f n'est pas injectif, ni surjectif, ni bijectif car le noyau de f n'est pas réduit à l'élément nul.

b) Le rang de f est la dimension du sous-espace vectoriel « Im f ». Il vaut donc 2.

Question 4

a) Le polynôme caractéristique P(k) de A (ou de f) est le déterminant de la matrice A-kI (I étant la matrice identité). Ce polynôme est nul pour k = 0. En effet, le déterminant de la matrice A est nul puisque ses deux dernières lignes sont identiques.

b) Le vecteur propre associé à la valeur propre 0 est un vecteur de Ker f. Il suffit de prendre le vecteur de coordonnées (1,1,1), base de Ker f.

c) On trouve $P(k) = -k^2(1+k)$. L'autre valeur propre est donc la valeur -1.

d) La valeur propre 0 est d'ordre de multiplicité 2. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est Ker f. Comme la dimension de ce sous-espace est 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Question 5

a) Soit la combinaison linéaire $au_1+bu_2+cu_3=0$. Pour montrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de R^3, il faut et il suffit de montrer que a=b=c=0 (pas de difficultés).

b) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\text{Det } P = -1 \quad ; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) Le rang de la matrice A' est égal au rang de A et vaut donc 2.

Exercice n° 3

Question 1

En utilisant la formule de Mac Laurin, on obtient

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Question 2

En utilisant de nouveau la formule de Mac Laurin, on obtient

$$h(x) = 3x^2 + x^2 e(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} e(x) = 0$$

Question 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = -\frac{1}{6}$$

Exercice n° 4

Les points stationnaires annulent les dérivées partielles d'ordre 1. On a donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f_x'(x,y,z) = 2x - y^2 + 2my = 0 \\ f_y'(x,y,z) = -z^2 - 2xy + 2mx = 0 \\ f_z'(x,y,z) = -2yz = 0 \end{cases}$$

La résolution donne le résultat suivant :

- si m = 0 ; il y a un point stationnaire : le point de coordonnées (0,0,0)

- si m est différent de 0, il y a trois points stationnaires dont les coordonnées sont : (0,0,0) ; (0,2m,0) ; ($-m^2/2$,m,0).

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

a) Le nombre total de livraisons est de 4800. Le nombre de livraisons dont le parcours est inférieur à 24 kilomètres est de 1560 (=60+360+520+620). Le pourcentage cherché est donc de 1560/4800 = 32,5%

b) Le nombre total de livraisons est de 4800. Le nombre de livraisons dont le parcours est compris entre 12 et 36 kilomètres est de 2630 (=520+620+710+780). Le pourcentage cherché est donc de 2630/4800 = 54,8%

Question 2

a) En prenant la définition de la moyenne et en utilisant les centres de classe, on trouve la valeur de 30,75 kilomètres.

b) Le coût moyen d'une livraison sachant que le prix du kilomètre parcouru est facturé 1,6748 euros est égal à 30,75 x 1,6748 = 51,50 euros.

c) Le coût moyen d'une livraison en 2002 est égal à 30,75 x (1,05) x 1,6748 x (0,98) = 52,99 euros. L'augmentation entre 2001 et 2002 est de 2,89%.

Question 3

La médiane de la série proposée dans le tableau est la valeur de la variable qui sépare la population en deux parties égales. Elle se situe donc dans l'intervalle compris entre 30 et 36 kilomètres. Pour obtenir une valeur plus précise, on utilise la méthode de l'interpolation linéaire :

$$\text{Médiane interpolée} = 30 + \frac{36-30}{3050-2270}(2400-2270),$$

et on trouve alors une valeur de 31 kilomètres.

Exercice n° 2

Question 1

Le taux d'accroissement annuel moyen de la variable étudiée recherché que l'on nomme i se calcule par la formule $57937 = 3813\,(1+i)^{40}$. On trouve i = 7,04%.

Question 2

Le nombre de places offertes en 1975 est donné par le calcul 57937 x 49,3/100 = 28563.

Exercice n° 3

Il n'y a pas de corrigé type pour cet exercice. On peut remarquer que :

- l'on compte un peu plus de 4 lits d'hôpital pour 1000 habitants ;
- ce nombre de lits est inégalement réparti sur le territoire (variation de 2,8 à 5) mais moins marqué que pour les personnels de santé ;
- le nombre de lits en médecine est plus élevé qu'en chirurgie alors que l'activité de court séjour (mesurée en nombre d'entrées) se répartit à parts égales ;
- l'on compte un peu plus de 3 médecins pour 1000 habitants ;
- ce nombre varie presque du simple au double entre la région Picardie et la région Provence Alpes Côte d'Azur en France métropolitaine ;
- l'espérance de vie à la naissance est plus forte pour les femmes (82,4 ans) que pour les hommes (74,9 ans) ;
- ….

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Il est rappelé aux candidats que les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Le parc des compteurs d'eau des abonnés d'une commune se répartit de la façon suivante :

10% des compteurs ont moins de deux ans et se trouvent de ce fait encore sous garantie ;

60% des compteurs ont entre deux et vingt ans ;

30% des compteurs ont plus de vingt ans.

Lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver le compteur défectueux est la suivante :

1% s'il s'agit d'un compteur sous garantie ;
5% s'il s'agit d'un compteur âgé de deux à vingt ans ;
10% s'il s'agit d'un compteur âgé de plus de vingt ans.

On notera les événements :

A : « le compteur est sous garantie »
B : « le compteur a entre deux et vingt ans d'âge »
C : « le compteur a plus de vingt ans d'âge »
D : « le compteur est défectueux »

Question 1

Calculer la probabilité de l'événement suivant « le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux ».

Question 2

Calculer la probabilité de l'événement D.

Question 3

L'agent constate qu'un compteur est défectueux. Calculer la probabilité qu'il soit encore sous garantie.

Question 4

L'agent trouve huit compteurs défectueux. Quelle est la probabilité pour que l'un au moins d'entre eux soit encore sous garantie ?

Exercice n° 2

Une urne contient trois pièces de 50 centimes d'euro et sept pièces de 10 centimes d'euro. On tire simultanément deux pièces. On suppose que les tirages sont équiprobables.

Question 1

Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « on tire deux pièces de 50 centimes d'euro »
B : « on tire deux pièces de 10 centimes d'euro »
C : « on tire une pièce de 10 centimes d'euro et une pièce de 50 centimes d'euro »

Question 2

Le total des valeurs des deux pièces définit une variable aléatoire X. Calculer la loi de probabilité de X, puis l'espérance de X.

Question 3

On procède à trois tirages successifs de deux pièces, les deux pièces étant remises dans l'urne après chaque tirage. Calculer la probabilité de l'événement « on tire deux fois une somme supérieure à 50 centimes d'euro ».

Exercice n° 3

On considère l'application f de C dans C qui à tout complexe z associe le complexe z' tel que :

$$z' = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z = f(z)$$

On pose $z_0 = 1$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$ et, de façon générale, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = f(z_n)$.

Question 1

Calculer le module et un argument de z_1.

Question 2

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$z_n = \left(\frac{1+i}{3\sqrt{2}}\right)^n$$

En déduire le module et un argument de z_n.

Question 3

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, z_n est-il :

a) réel ?
b) imaginaire pur ?

Question 4

Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, du module de z_n.

Exercice n° 4

Trouver un équivalent, au voisinage de 2, de l'expression :

$$y = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} - \frac{3}{2}$$

Exercice n° 5

Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\,dx$$

Exercice n° 6

Soit f_a l'application linéaire de R^3 dans R^3 définie par :

$$f_a(x,y,z) = (ax+y+z,\ 2y+z,\ y+2z)$$

où a est un paramètre réel fixé.

<u>Question 1</u>

Trouver le noyau et l'image de f_a. Donner leurs dimensions.

<u>Question 2</u>

Donner la matrice M associée à f_a , par rapport à la base :

$$\{ (1,1,1) ; (1,0,0) ; (0,1,0) \} \text{ de } R^3$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

De quelle vérité l'opinion est-elle capable ?

Sujet n° 2

Dans quelle mesure l'école est-elle aujourd'hui un facteur d'intégration sociale ?

Sujet n° 3

Les hommes ont-ils besoin d'être gouvernés ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

En vous appuyant sur le modèle macroéconomique keynésien en économie ouverte (IS LM BP), il vous est demandé d'analyser les conséquences du choix d'un régime de change (fixe ou flexible) sur la politique budgétaire et monétaire en cas de mobilité élevée des capitaux.

Sujet n° 2

Le sujet n° 2 est constitué de deux parties (microéconomie et macroéconomie) qui figurent en pages 2 et 3-4 respectivement.

MICROÉCONOMIE

Cette première partie comporte une question et un exercice. Elle est globalement notée sur 10.

QUESTION (5 points)

La notion de fonction de production :

1) Définition générale et propriétés.
2) La technologie de Léontief.
3) La technologie de Cobb Douglas.

EXERCICE (5 points)

Une économie d'échange est caractérisée par deux agents 1 et 2 et deux biens, Y_1 et Y_2. La fonction d'utilité du premier agent est $U_1 = 3Y_1$. Celle du second consommateur s'écrit : $U_2 = 5Y_2$. On suppose que les dotations initiales du premier consommateur en biens 1 et 2 sont respectivement de ½ et ½. Les dotations du second consommateur sont égales à celle du premier.

a. Tracez les courbes d'indifférence des deux consommateurs dans la boîte d'Edgeworth.
b. L'allocation initiale est-elle optimale au sens de Pareto ? Expliquez.
c. Tracez la courbe des contrats.
d. On suppose maintenant que les agents échangent, en prenant les prix sur les marchés comme donnés et en maximisant leur fonction d'utilité. Quelle est l'allocation concurrentielle ? Quel est le rapport d'échange entre les biens Y_1 et Y_2 s'établissant à l'équilibre ?

MACROÉCONOMIE

Cette seconde partie comporte une question et un exercice. Elle est globalement notée sur 10.

QUESTION (5 points)

Les effets d'une dévaluation dans les économies développées et dans les économies en voie de développement.

EXERCICE (5 points)

Une économie est représentée par le modèle keynésien simplifié suivant :

Fonction de consommation des ménages : $C = c.Q_d + \overline{C}$ $\quad \overline{C} = 20$

Revenu disponible des ménages : $Q_d = Q - T$

Recettes fiscales : $T = t.Q + \overline{T}$ $\quad \overline{T} = -10$

Dépenses publiques : $\overline{G}$ $\quad$ exogènes

Solde budgétaire : $T - \overline{G} = -10$

Investissement des entreprises : $I = a / i$ $\quad a = 2.6$

Taux d'intérêt nominal : $i = 10\%$

Balance commerciale : $B = \overline{X} - M$

Exportations exogènes : $\overline{X}$

Importations : les importations sont déterminées par la contrainte d'équilibre de la balance commerciale, le pays étant une petite économie surendettée.

Equilibre global : $Q = C + I + \overline{G} + \overline{X} - M$

Le seuil d'épargne des ménages est atteint pour $Q_d = 100$

Le multiplicateur des dépenses publiques $k_g \cong 3,57$

1) Trouver le revenu d'équilibre, le montant des recettes et des dépenses de l'Etat, le niveau des investissements et enfin le niveau des importations.

2) La production domestique peut être représentée par la fonction de production suivante : $Q = 60.\sqrt{L}$. Le taux de chômage est de 30,55 % de la population active. La population active représente les 3/4 de la population ayant l'âge de travailler, et la population en âge de travailler les deux tiers de la population totale. Quel est le niveau de la production par tête. Quel serait ce niveau au plein emploi ?

3) Pour atteindre le plein emploi, l'Etat hésite entre une action sur les dépenses publiques et une action sur les recettes fiscales. Evaluer les résultats de ces deux politiques. Laquelle conseillez-vous de choisir ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Question 1

Le comité régional du tourisme réalise tous les mois une enquête auprès d'un échantillon d'hôtels de la région pour mesurer l'activité économique de ce secteur. L'hôtelier enquêté inscrit à chaque arrivée le nombre de personnes qui vont passer au moins une nuit à l'hôtel ainsi que le nombre de nuits effectivement passées. Le tableau ci-dessous correspond au résultat synthétique communiqué par un hôtelier pour le mois de septembre 2004. A partir des éléments fournis, donner la moyenne et l'écart type du nombre de nuitées.

Situation au cours du moins de septembre 2004

Nb de nuitées	Nb d'arrivées
1	300
2	200
3	70
4	20
5	10
Total	600

Question 2

Le comité régional du tourisme constate depuis plusieurs mois que le nombre de répondants à l'enquête diminue. Craignant pour la qualité de l'enquête, elle demande à un chargé d'études de lui indiquer, sur la base de ses connaissances statistiques, si le taux de réponse a effectivement diminué au fil des mois. Pour ce faire, le chargé d'études se propose de comparer le taux de réponse constaté en septembre 2000 à celui constaté en septembre 2004.

En 2000, sur 558 unités enquêtées, 267 avaient répondu au questionnaire. Pour 2004, le résultat est de 236 répondants sur 540 questionnaires envoyés.

1) A partir des taux de réponse estimés, notés f_{2000} et f_{2004} que vous calculerez, apportez une réponse à la question posée par le comité régional.

Cette première analyse, assez sommaire, ne satisfait pas le président du comité régional du tourisme qui vous demande de faire un test de comparaison.

2) Calculez $s=\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_{2000}}+\frac{1}{n_{2004}}\right)}$ où $p=\frac{n_{2000}f_{2000}+n_{2004}f_{2004}}{n_{2000}+n_{2004}}$,

n_{2000} est le nombre d'hôteliers enquêtés en 2000 et n_{2004} celui des hôteliers enquêtés en 2004.

3) Dans l'hypothèse où les taux de réponse sont identiques, on considérera que la loi suivie par la différence « f_{2000} - f_{2004} » peut être approximée par une loi normale de moyenne nulle et d'écart type s. A partir des probabilités données ci-dessous pour la loi normale centrée réduite, calculez P(X>x) où x est la différence observée entre septembre 2004 et septembre 2000.

T	P (T>t)
1,1	0,1357
1,2	0,1151
1,3	0,0968
1,4	0,0808
1,5	0,0668

4) Concluez.

<u>Question 3</u>

La région est constituée de trois départements. On dispose des données suivantes pour la saison touristique 2003 et 2004. Vous constaterez que le nombre de nuitées a augmenté sur un an. Le président du comité régional du tourisme cherche à déterminer si cela provient du fait que le nombre de personnes qui ont fréquenté un hôtel a progressé ou si cela provient du fait que la durée du séjour (nombre de nuitées par arrivée) a augmenté. Pouvez-vous l'aider ?

Département	2003	2004
A	Arrivées : 1.050.000 Nuitées : 1.850.000 Durée du séjour : 1,76	Arrivées : 1.030.000 Nuitées : 1.900.000 Durée du séjour : 1,84
B	Arrivées : 450.000 Nuitées : 750.000 Durée du séjour : 1,67	Arrivées : 460.000 Nuitées : 780.000 Durée du séjour : 1,70
C	Arrivées : 140.000 Nuitées : 280.000 Durée du séjour : 2,00	Arrivées : 160.000 Nuitées : 290.000 Durée du séjour : 1,81

Pour ce faire, l'appel aux calculs des indices de Laspeyre et de Paasche est vivement conseillé, en prenant la durée du séjour comme variable prix et le nombre d'arrivées comme variable quantité.

Question 4

A partir des éléments fournis dans le tableau ci-après, il vous est demandé de déterminer en quelle année le nombre de nuitées dépassera le seuil des 2.800.000 si la croissance annuelle constatée entre 1990 et 2003 se prolonge.

Nombre de nuitées

	1990	2003
Total région	2.480.000	2.650.000

Question 5

A partir des tableaux 1 à 4 suivants, il vous est demandé de rédiger un article de 25 lignes maximum sur la saison touristique (de mai à septembre) dans la région constituée des 3 départements A, B et C en comparant la saison 2004 à la saison 2003.
(source des tableaux : Insee - enquête tourisme)

Tableau 1 - Nombre de nuitées par mois

Région	2003	2004
Mai	489 191	511 088
Juin	532 611	541 636
Juillet	599 299	641 340
Août	741 764	725 018
Septembre	525 894	550 397
Année	2 889 059	2 969 479

Tableau 2 - Nombre de nuitées par nationalités

Région	2003	2004
Ensemble	2 889 059	2 969 479
France	1 813 144	1 821 021
Etrangers	1 075 915	1 148 458
dont :		
Iles Britanniques	515 844	471 438
Allemagne Bénélux	234 024	280 189
Amérique du Nord	120 493	168 115
Pays méditerranéens	109 450	118 712

Département A	2003	2004
Ensemble	1 863 242	1 900 485
France	1 121 354	1 124 070
Etrangers	741 888	776 415
dont :		
Iles Britanniques	350 713	322 409
Allemagne Bénélux	163 045	189 693
Amérique du Nord	91 408	121 187
Pays méditerranéens	70 005	75 556

Département B	2003	2004
Ensemble	744 560	779 009
France	471 844	496 274
Etrangers	272 716	282 735
dont :		
Iles Britanniques	132 256	112 033
Allemagne Bénélux	56 220	66 425
Amérique du Nord	23 365	31 731
Pays méditerranéens	34 896	35 777

Département C	2003	2004
Ensemble	281 257	289 985
France	219 946	200 677
Etrangers	61 311	89 308
dont :		
Iles Britanniques	32 875	36 996
Allemagne Bénélux	14 759	24 071
Amérique du Nord	5 720	15 197
Pays méditerranéens	4 549	7 379

Tableau 3 - Indicateur « durée de séjour »

Mai à Septembre			Juillet-Août		
Durée de séjour			Durée de séjour		
Région	2003	2004	Région	2003	2004
Durée séjour	1,8	1,8	Durée séjour	1,8	1,9
Arrivées	1 636 601	1 645 774	Arrivées	726 978	725 255
Français	1 026 991	1 037 382	Français	433 688	439 565
Durée séjour Français	1,8	1,8	Durée séjour Français	1,9	1,9
Etrangers	609 610	608 392	Etrangers	293 290	285 690
Durée séjour Etrangers	1,8	1,9	Durée séjour Etrangers	1,8	1,9

Durée de séjour			Durée de séjour		
Département A	2003	2004	Département A	2003	2004
Durée séjour	1,8	1,8	Durée séjour	1,8	1,9
Arrivées	1 051 237	1 029 515	Arrivées	470 549	454 808
Français	646 600	630 783	Français	273 242	266 711
Durée séjour Français	1,7	1,8	Durée séjour Français	1,9	2,0
Etrangers	404 637	398 732	Etrangers	197 307	188 097
Durée séjour Etrangers	1,8	1,9	Durée séjour Etrangers	1,8	1,9

Durée de séjour			Durée de séjour		
Département B	2003	2004	Département B	2003	2004
Durée séjour	1,7	1,7	Durée séjour	1,8	1,8
Arrivées	448 303	459 881	Arrivées	197 487	205 102
Français	280 097	298 189	Français	118 903	129 008
Durée séjour Français	1,7	1,7	Durée séjour Français	1,8	1,8
Etrangers	168 206	161 692	Etrangers	78 584	76 094
Durée séjour Etrangers	1,6	1,7	Durée séjour Etrangers	1,6	1,7

Durée de séjour			Durée de séjour		
Département C	2003	2004	Département C	2003	2004
Durée séjour	2,1	1,9	Durée séjour	2,1	1,9
Arrivées	137 061	156 378	Arrivées	58 942	65 345
Français	100 294	108 410	Français	41 543	43 846
Durée séjour Français	2,2	1,9	Durée séjour Français	2,3	1,9
Etrangers	36 767	47 968	Etrangers	17 399	21 499
Durée séjour Etrangers	1,7	1,9	Durée séjour Etrangers	1,6	1,8

Tableau 4 - Taux d'occupation des chambres sur la saison Mai/Septembre

Occupation	2003					2004				
	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.
Dept A	67,6%	73,5%	75,3%	86,8%	73,7%	70,1%	77,7%	78,6%	87,9%	76,7%
Dept B	61,4%	68,8%	69,3%	86,2%	74,2%	60,5%	69,1%	65,6%	82,6%	68,8%
Dept C	52,4%	60,1%	59,0%	69,9%	63,4%	53,4%	64,8%	62,3%	66,4%	63,1%
Région	63,8%	70,4%	71,5%	84,4%	72,4%	65,1%	73,6%	72,9%	83,6%	72,7%

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

$$P(A \cap D) = P(D/A) \times P(A) = 0{,}001$$

Question 2

$$P(D) = P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C) = 0{,}001 + 0{,}030 + 0{,}030 = 0{,}061$$

Question 3

$$P(A/D) = P(A \cap D)/P(D) = 1/61$$

Question 4

La probabilité cherchée est égale à 1 – P (les 8 compteurs ne sont plus sous garantie). Les huit compteurs sont indépendants les uns des autres. Cela revient à chercher $1 - P(\overline{A}/D)^8$. $Hors$ $P(\overline{A}/D) = P(\overline{A} \cap D)/P(D) = 60/61$

Exercice n° 2

Question 1

En utilisant la définition de la probabilité comme étant le rapport entre le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles, on obtient p(A) = 1/15 ; p(B) = 7/15 et p(C) = 7/15

Question 2

X correspond au total des valeurs des deux pièces tirées. Les valeurs prises par la variable X sont 20 centimes d'euros (tirage de 2 pièces de 10 centimes d'euros), 60 centimes d'euros (tirage d'une pièce de 10 centimes d'euros et d'une pièces de 50 centimes d'euros), 1 euro (tirage de 2 pièces de 50 centimes d'euros). D'où P(X = 20) = p(B) ; P(X = 60) = p(C) et P(X=100) = p(A)

L'espérance de X vaut 44 centimes d'euros

Question 3

Pour un tirage donné, la probabilité p d'obtenir une somme supérieure à 50 centimes d'euros est la somme de p(X=60) et de p(X=100) donc k = 8 /15

Soit E l'évènement « on tire deux fois une somme supérieure à 50 centimes d'euros », l'évènement E est réalisé lorsque 2 des 3 tirages sont tels que le total est supérieur à 50 centimes d'euros et lorsque l'autre tirage donne une somme inférieure à 50 centimes d'euros (c.a.d. égale à 20 centimes d'euros). Par suite,

$$P(E) = C_3^2 \ k^2 \ (1-k) \ = \ 448/1125$$

Exercice n° 3

Question 1

Le module cherché vaut 1/3 et un argument de z_1 est π/4

Question 2

Soit P(n) la propriété cherchée, celle-ci est valable pour n=1. On la suppose vraie pour le rang n et on cherche à la vérifier pour le rang n+1. Ce qui ne pose aucun problème.

En ce qui concerne le module, on trouve $1/3^n$ et comme argument nπ/4, par utilisation de la formule de Moivre.

Question 3

a) zn est réel si et seulement si nπ/4 = k π, c'est-à-dire n=4k (multiple de 4)
b) zn est imaginaire pur si et seulement si nπ/4 = k π/2, c'est-à-dire n=2k mais non égal à 4k, ou encore si n est un entier naturel pair non multiple de 4

Question 4

La limite cherchée est nulle car 1/3 est inférieur à 1

Exercice n° 4

En effectuant un changement de variable pour ramener l'étude au point zéro afin d'utiliser les développements limités connus (u = x-2), on obtient comme équivalent du numérateur N et du dénominateur D :

$$N = 2\left(\frac{u}{8} - \frac{u^2}{8x16} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

$$D = 3\left(\frac{u}{18} - \frac{u^2}{8x81} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

Ensuite, on trouve que la fonction y qui est égale à N/D - (3/2) a comme équivalent -5u/96

Exercice n° 5

En multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur (de façon à faire disparaître la fonction racine au dénominateur), l'intégrale cherchée se simplifie et le problème se ramène au calcul de l'intégrale $J = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$. En effet, les autres termes du calcul sont des fonctions simples pour lesquelles l'intégration ne pose aucune difficulté. En effectuant une intégration par parties sur J, le problème se ramène au calcul de l'intégrale $K = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. Pour finir, on réalise un changement de variable en posant $\sqrt{1+x^2} = x+t$ et on trouve le résultat suivant : $I = -\frac{2}{x} + x - 2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - 2\ln\left|\sqrt{1+x^2} - x\right| + Cste$

Exercice n° 6

Question 1

Si a = 0, la dimension de Ker f est 1 et une base du noyau est le vecteur (1,0,0) . Si a est différent de 0, f est injective et dim Ker f = 0

Pour le sous espace vectoriel « image », si a est différent de 0, Im f = R^3 . Si a est nul, la dimension de Imf est 2. Une base de ce sous espace vectoriel est constitué des vecteurs (1,2,1) et (1,1,2)

Question 2

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a-1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

La moyenne obtenue est égale à 1,73 nuitées et l'écart type vaut 0,91 nuitées.

Question 2

1) $f_{2000} = 0,478$ et $f_{2004} = 0,437$
2) p = 0,458 et s = 0,03
3) x = 0,041 et t = 1,36 donc P(X>x) est voisin de 0,09
4) La probabilité que nous constations la différence observée est donc inférieure à 10%. Hors, nous l'observons. Si l'on accepte un risque de se tromper supérieur à la probabilité trouvée à la question précédente, on peut affirmer que les taux de réponse ont « bel et bien » diminués en 4 ans.

Question 3

Si l'on note, conformément à ce qu'indiquait dans l'énoncé :

- Q_0 le nombre d'arrivées en 2003. Q_0 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- Q_1 le nombre d'arrivées en 2004. Q_1 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- P_0 la durée du séjour en 2003. P_0 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.
- P_1 la durée du séjour en 2004. P_1 prend trois valeurs, correspondant à chacun des départements.

$\Sigma P_0 Q_0 = 2.880.000$
$\Sigma P_1 Q_0 = 2.950.000$
$\Sigma P_0 Q_1 = 2.901.000$
$\Sigma P_1 Q_1 = 2.970.000$

L'indice de Laspeyres des prix vaut 102,4 ($\Sigma P_1 Q_0 / \Sigma P_0 Q_0$) et l'indice de Paasche des quantités vaut 100,7 ($\Sigma P_1 Q_1 / \Sigma P_1 Q_0$). Le nombre de nuitées entre 2003 et 2004 sur la région a augmenté de 3,1%. Cette hausse est donc du principalement à l'effet « durée du séjour » (prix).

Question 4

Sur 13 ans, l'augmentation moyenne annuelle constatée s'élève à 0,51%
Pour atteindre le seuil des 2.800.000 nuitées, il faudra encore 11 ans. Ce sera donc en 2014 que ce chiffre sera atteint.

Question 5

Il n'y a pas de corrigé type mais on peut signaler :

- que la saison 2004 est une bonne année puisque le nombre de nuitées a augmenté (+2,8%)
- que la venue des estivants étrangers explique cette augmentation, particulièrement dans le département C (+45,7% de nuitées étrangères)
- que les britanniques sont les plus nombreux parmi les touristes étrangers
- que la durée moyenne de séjour progresse dans tous les départements pour la clientèle étrangère mais qu'elle régresse pour la clientèle française
- que le pic de la saison touristique correspond au mois d'août
- qu'en 2004, le taux d'occupation en juin a bien progressé
- …

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Il est rappelé aux candidats que les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1

Toutes les fonctions considérées dans cet exercice sont des applications de R dans R. On rappelle que tout nombre irrationnel est limite d'une suite croissante et d'une suite décroissante de nombres rationnels.

Question 1

On appelle F l'ensemble des applications continues f de R dans R satisfaisant l'égalité :

$$(1)\ \forall (x,y) \in R^2 \qquad f(x+y)\,f(x-y) = \left[f(x)\,f(y)\right]^2$$

Soit f un élément de F

a) Vérifier que la fonction 2^{-x^2} appartient à F

b) Ecrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants : $x = 0$; $y = 0$

c) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?

d) Montrer que f est l'application nulle si et seulement si $f(0) = 0$

e) Montrer que si f s'annule pour une valeur $x = a$, elle s'annule pour $x = 0$ (on pourra considérer les nombres $f(a/2)$, $f(a/4)$, …, et la question 1b)

f) Montrer que si f n'est pas l'application nulle, on a $f(R) \subset R_+^*$ *ou* $f(R) \subset R_-$

Question 2

On appelle G l'ensemble des applications continues g de R dans R satisfaisant à l'égalité :

$$(2)\ \forall (x,y) \in R^2 \qquad g(x+y) + g(x-y) = 2\left[g(x) + g(y)\right]$$

a) Déterminer les éléments de G à partir des éléments de F (on pourra considérer la fonction $g(x) = ln\,|\,f(x)\,|$, où f est un élément de F distinct de l'application nulle sur R)

b) Soit g un élément de G

   i. Montrer que $g(0) = 0$

   ii. Montrer que g est une fonction paire

   iii. Démontrer l'égalité $\forall x \in R \quad \forall n \in N \quad g(nx) = n^2 g(x)$

   iv. Que peut-on en déduire de $g\left(\frac{p}{q}x\right)$, où p appartient à Z et q à N^* (on pourra effectuer une démonstration par récurrence et poser $y = -\frac{qx}{q+1}$ dans la relation (2))

c) Déterminer l'ensemble G. En déduire l'ensemble F.

Exercice 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x différent de 1, par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

$f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f ; par convention $f^{(0)} = f$

Question 1

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \quad (x \neq 1)$$

où P_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré. Exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P'_n(x)$

b) Calculer $P_n(1)$, pour n entier naturel

c) Donner les expressions de P_0, P_1 et P_2

Question 2

a) Montrer que, pour tout réel x différent de 1, on a :

$$(x-1)\,f'(x) - (x-2)\,f(x) = 0$$

b) En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on a :

$$P_{n+1}(x) = (n+2-x)\,P_n(x) + n\,(x-1)\,P_{n-1}(x)$$

c) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$P'_n = -\,n\,P_{n-1}$$

Question 3

a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ *et* P_{n-k}. En déduire que $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k\,n!$

b) Appliquer la formule de Taylor à P_n entre 1 et x (x étant au voisinage de 1). En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{P_n(x)}{n!} = e^{1-x}$

Exercice 3

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'apparition de pile (P) est p, celle de face (F) est q avec $p+q = 1$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X le rang d'apparition pour la première fois de deux résultats « pile » consécutifs. Ainsi, dans la série suivante de 10 lancers, on a X = 5 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	P	P	F	F	P	P	F

Pour tout entier naturel n différent de 0, on pose $a_n = P(X=n)$

Question 1

Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 en fonction de p et q

Question 2

Montrer, en distinguant suivant le résultat du premier lancer, que, pour $n \geq 3$, on a :

$$a_n = q\, a_{n-1} + p\, q\, a_{n-2}$$

Question 3

On suppose à présent que $p = 2/3$ et $q = 1/3$

a) Etablir que, pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X

Exercice 4

Soient k un nombre réel et f une application linéaire de R^4 dans R^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + kz + t, x + z + t, y + z)$$

Question 1

Déterminer, pour chaque valeur de k, les sous espaces Ker f et Im f. On en donnera une base et une (ou des) équation(s)

Question 2

Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de R^4 et de R^3

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

La liberté est-elle une donnée ou une conquête ?

Sujet n° 2

Faut-il penser que l'accroissement des pouvoirs de la médecine lié aux découvertes de la biologie (clonage, médecine génétique, moléculaire) peut constituer un problème inquiétant ?

Sujet n° 3

Qu'est-ce que le développement durable ? Quelles en sont les conditions ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

La participation des pays en développement à la croissance mondiale est très inégale. Comment expliquer la diversité des trajectoires de ces pays, conduisant à leur intégration ou à leur exclusion ?

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

Exercice

I - Le Consommateur

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1^2 \; q_2$$

I.I L'échange bilatéral

1) Le consommateur A possède le panier Q_A = (2, 2). Rappelez la définition précise d'une courbe d'indifférence. Tracez la courbe sur laquelle le consommateur se trouve (sur une 1ère figure) et interprétez sa forme.

2) Donnez le taux marginal de substitution de A en Q_A. Interprétez votre résultat.

3) Soit un autre consommateur B, qui a les mêmes préférences que A, mais qui possède lui le panier $Q_B = (2, 1)$. Représentez succinctement (sur une 2ème figure) l'ensemble des échanges possibles entre ces deux agents dans une boîte d'Edgeworth (on considère donc que la quantité totale de biens disponibles est donnée par $Q_A + Q_B$).

4) Après avoir rappelé la définition d'un optimum de Pareto, représentez l'ensemble de ces optima de Pareto dans la boîte d'Edgeworth tracée précédemment.

I.II Le choix de concurrence parfaite

Le consommateur A est en situation de concurrence parfaite.

Les prix des deux biens sont $p_1 = 2$ et $p_2 = 1$.

1) Rappelez la définition de la concurrence parfaite.

2) Quelle est la valeur du revenu de A à ces prix ? Tracez sa contrainte budgétaire sur la 1ère figure.

3) Calculez son choix optimal. Interprétez votre résultat, économiquement et graphiquement.

4) Comment modifie-t-il son choix si $p_1 = 4$ avec p_2 inchangé ? Comment interpréter cette modification en termes d'effet de revenu et d'effet de substitution (le calcul précis des deux effets n'est pas demandé) ?

II - Le Producteur

Soit une entreprise en situation de concurrence parfaite. Sa fonction de coût total est donnée par :

$$C(q) = q^2 - 7q + 16 \qquad \text{où } q \text{ est la quantité du bien produit.}$$

1) Donnez la fonction de coût marginal. Rappelez son interprétation économique.

2) Donnez la fonction de coût moyen. Rappelez son interprétation économique.

3) Tracez-les succinctement sur la même figure. Interprétez.

4) A partir de quel niveau du prix p de son produit l'entreprise amortit-elle ses coûts fixes ?

5) Donnez sa fonction d'offre de concurrence parfaite.

6) Si $p = 3$, donnez son profit et représentez-le sur le graphique précédent.

7) Supposons désormais que l'entreprise se trouve en situation de monopole. Comment d'après vous va-t-elle modifier son comportement ?

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (3 points)

Soit une économie composée de ménages, d'entreprises et de l'Etat.

La fonction de consommation des ménages est donnée par $C = C_0 + aY_D$, où Y_D représente le revenu disponible des ménages. L'investissement I des entreprises, les dépenses publiques G ainsi que le montant de l'impôt T sont tous exogènes.

1) Déterminez le revenu d'équilibre de l'économie.

2) Calculez le multiplicateur keynésien. De quoi dépend sa valeur ?

Supposons désormais que $I = 100$, $C_0 = 200$, $G = 300$, $T = 300$ et que $a = 0{,}8$.

3) Calculez le multiplicateur de dépenses publiques. Quel est l'effet sur le revenu d'une hausse de 50 des dépenses publiques ?

4) Calculez le multiplicateur fiscal. Quel est l'effet sur le revenu d'une baisse d'impôt de 50 ? En comparant votre résultat avec celui de la question précédente, expliquez pourquoi les deux politiques n'ont pas la même efficacité.

5) Si l'Etat décide désormais de maintenir son équilibre budgétaire, c'est-à-dire de financer la hausse des dépenses publiques de 50 par une hausse équivalente de l'impôt, cela aura-t-il un effet sur le revenu ? Interprétez.

Questions (7 points)

I) La théorie quantitative de la monnaie : enjeux et limites. **(5 points)**

II) Les déterminants de l'investissement chez Keynes. (**2 points**)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1

A partir des 5 tableaux donnés en annexe, il vous est demandé de répondre aux questions ci-dessous.

Question 1

Donner la variation de la criminalité globale (faits constatés) et de la délinquance de voie publique (faits constatés) entre 1994 et 1995.

Question 2

Calculer le taux annuel moyen de croissance de la criminalité globale entre 1990 et 2000.

Question 3

Sur la décennie étudiée, commenter l'évolution de la criminalité par rapport à celle de la population. Quelle représentation graphique est la plus appropriée pour comparer ces deux évolutions ? Justifier.

Question 4

Calculer le taux de criminalité en 2000 (rapport pour 1.000 habitants). Comparer avec l'année 1990.

Question 5

Pour l'année 2000, donner la part de chacune des catégories suivantes dans la criminalité :

- vols ;
- infractions économiques et financières ;
- atteintes aux personnes ;
- autres infractions.

Quelle représentation graphique vous semble la plus souhaitable pour représenter ces données ? Justifier.

Question 6

Donner les quatre régions qui concentrent à elles seules plus de la moitié des crimes et délits constatés en France en 2000.

Question 7

Donner le nombre de personnes majeures mises en cause en 2000.

Exercice 2

Rédiger une synthèse de 20 lignes sur l'évolution de la criminalité.

Evolution de la criminalité en France (faits constatés)

Années 1990 - 2000 (en nombre et en évolution)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Criminalité globale	**3 492 712**	**3 744 112** 7,20%	**3 830 996** 2,32%	**3 881 894** 1,33%	**3 919 008** 0,96%	**3 665 320** -6,47%	**3 559 617** -2,88%	**3 493 442** -1,86%	**3 565 525** 2,06%	**3 567 864** 0,07%	**3 771 849** 5,72%
Infractions économiques et financières	551 810	566 567 2,67%	413 417 -27,03%	409 246 -1,01%	440 179 7,56%	357 104 -18,87%	310 910 -12,94%	295 511 -4,95%	287 415 -2,74%	295 734 2,89%	352 164 19,08%
Crimes et délits contre les personnes	134 352	141 716 5,48%	146 095 3,09%	152 764 4,56%	175 374 14,80%	191 180 9,01%	198 155 3,65%	214 975 8,49%	220 948 2,78%	233 194 5,54%	254 514 9,14%
Autres infractions	500 950	578 958 15,57%	656 040 13,31%	679 467 3,57%	730 381 7,49%	716 392 -1,92%	719 552 0,44%	738 655 2,65%	765 758 3,67%	786 408 2,70%	830 475 5,60%
Vols (y compris recels)	2 305 600	2 456 871 6,56%	2 615 444 6,45%	2 640 417 0,95%	2 573 074 -2,55%	2 400 644 -6,70%	2 331 000 -2,90%	2 244 301 -3,72%	2 291 404 2,10%	2 252 528 -1,70%	2 334 696 3,65%

Source : Ministère de l'Intérieur - Direction centrale de la police judiciaire

Comparaison entre les faits constatés et la population

Années 1990 - 2000 (base 100 en 1990)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Total faits constatés tous services (source Ministère de l'Intérieur)	**100,00**	**107,20**	**109,69**	**111,14**	**112,21**	**104,94**	**101,92**	**100,02**	**102,08**	**102,15**	**107,99**
Nombre	3 492 712	3 744 112	3 830 996	3 881 894	3 919 008	3 665 320	3 559 617	3 493 442	3 565 525	3 567 864	3 771 849
Population (source INSEE) *	**100,00**	**100,49**	**101,07**	**101,61**	**102,06**	**102,50**	**102,90**	**103,32**	**103,72**	**103,36**	**103,77**
Nombre	56 614 493	56 893 206	57 217 577	57 526 521	57 779 305	58 027 305	58 255 883	58 493 885	58 722 674	58 518 748	58 746 500

Source : Ministère de l'Intérieur - Direction centrale de la police judiciaire

*Années 1990 et 1999, chiffres obtenus par les recensements réalisés par l'INSEE.

*Années 1991 à 1998 et 2000, chiffres estimés annuellement par l'INSEE entre deux recensements. Les données obtenues reposent sur une méthode d'estimation du solde migratoire mise en œuvre par l'INSEE.

Evolution de la délinquance de voie publique en France (faits constatés)
Années 1990 - 2000 (en nombre et en évolution)

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Délinquance de voie publique	**1 772 278**	**1 944 222**	**2 146 447**	**2 204 255**	**2 146 801**	**2 020 464**	**2 008 356**	**1 931 625**	**1 957 010**	**1 899 281**	**1 937 509**
Evolution		9,70%	10,40%	2,69%	-2,61%	-5,88%	-0,60%	-3,82%	1,31%	-2,95%	2,01%
Part D.V.P. dans la criminalité globale	50,74%	51,93%	56,03%	56,78%	54,78%	55,12%	56,42%	55,29%	54,89%	53,23%	51,37%

*** La délinquance de voie publique =**
- Vols à main armée, vols avec violences, cambriolages
- Vols d'automobiles, vols à la roulotte et vols d'accessoires
- Destructions et dégradations

La délinquance et la criminalité constatées par région en France
Années 1999 - 2000

Régions administratives	Nombre de faits constatés – Année 1999	2000	Variation	Différence en nombre
Alsace	98 591	107 124	8,65%	8 533
Aquitaine	154 997	161 959	4,49%	6 962
Auvergne	46 998	48 516	3,23%	1 518
Basse-Normandie	59 666	60 923	2,11%	1 257
Bourgogne	63 143	68 174	7,97%	5 031
Bretagne	109 996	121 979	10,89%	11 983
Centre	115 587	121 663	5,26%	6 076
Champagne-Ardenne	67 087	69 671	3,85%	2 584
Corse	15 044	14 377	-4,43%	-667
Franche-Comté	47 773	49 589	3,80%	1 816
Haute-Normandie	95 314	96 258	0,99%	944
Ile-de-France	960 657	1 007 104	4,83%	46 447
Languedoc-Roussillon	176 632	192 895	9,21%	16 263
Limousin	24 308	27 420	12,80%	3 112
Lorraine	103 837	110 967	6,87%	7 130
Midi-Pyrenées	116 069	123 045	6,01%	6 976
Nord-Pas-de-Calais	261 434	269 921	3,25%	8 487
Pays de la Loire	141 351	148 981	5,40%	7 630
Picardie	96 229	106 137	10,30%	9 908
Poitou-Charentes	69 834	73 349	5,03%	3 515
Provence-Alpes-Côte-d'azur	390 336	412 152	5,59%	21 816
Rhône-Alpes	349 367	374 412	7,17%	25 045
Non ventilés	3 614	5 233	44,80%	1 619
Total National	**3 567 864**	**3 771 849**	**5,72%**	**203 985**

Les mineurs mis en cause par l'ensemble des services
1991 - 2000

	Mineurs mis en cause	Part dans le total PMC
1991	101 631	13,2%
1992	98 864	13,9%
1993	92 912	13,5%
1994	109 338	14,1%
1995	126 233	15,9%
1996	143 824	17,9%
1997	154 437	19,4%
1998	171 787	21,8%
1999	170 387	21,3%
2000	175 256	21,0%

Source de tous les tableaux : Ministère de l'Intérieur - Direction centrale de la police judiciaire

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

a) pas de difficulté particulière

b) $\textit{Pour } x=0 \;;\; f(y)f(-y)=\left[f(0)f(y)\right]^2$
$\textit{Pour } y=0 \;;\; f(x)f(x)=\left[f(x)f(0)\right]^2$

c) $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$

d) $\Rightarrow$ *évident*
$\Leftarrow$ *si* $f(0)=0$ *alors* $f(x)=0$ *en utilisant la question* $1-b$

e) Cas 1 : si a=0, c'est fini

Cas 2 : si a est différent de 0 alors on peut écrire $a = a/2 + a/2$. En posant $x=a/2$ et $y=a/2$ et en utilisant la relation (1), on obtient $f(a/2)=0$. En décomposant $a/2$ comme somme de $a/4$ et de $a/4$, on obtient que $f(a/4)$ est nul. En continuant de la sorte, on arrive à montrer que, pour tout n entier naturel $f(a/2^n)$ est nul. La fonction f étant continue, $a/2^n$ tendant vers 0 quand n tend vers + l'infini, $f(0)=0$

f) En utilisant 1-e et 1-d, on sait que la fonction f ne s'annule jamais. En utilisant 1-b, on a, pour tout y, $f(y)f(-y)$ strictement positif, donc, les deux termes sont de même signe. D'où le résultat.

Question 2

a) G = F
b)
   i. évident en posant $x = y = 0$ dans la relation (2)
   ii. évident en posant $x = 0$ dans la relation (2)

iii. démonstration par récurrence (en posant $x = (n\text{-}1)\ x$ et $y = x$ dans la relation (2))

iv. démonstration par récurrence
cas 1 : si q=1, pas de problème pour p appartenant à N (question précédente) Pour passer à Z, il suffit d'utiliser le fait que la fonction est paire.
cas 2 : si q est différent de 1, on est amener à étudier la fonction $g\left(\frac{1}{q+1}x\right)$, et

on va utiliser $x = x$ et $y=-\frac{qx}{q+1}$ dans la relation (2) pour montrer que $g\left(\frac{1}{q+1}x\right)=\frac{1}{(q+1)^2}g(x)$

c) L'ensemble G est composé des fonctions ax^2. L'ensemble F est composé des fonctions de type $\pm\mu e^{x^2}$

Exercice 2

Question 1

a) Par récurrence, on démontre la formule demandée où P_n est un polynôme de degré n dont le terme de plus haut degré est $(-1)^{n+1}$. $P_{n+1}(x) = (n+2-x)\ P_n(x) + (1-x)\ P'_n(x)$

b) $P_n(1) = n\,!$

c) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x + 2$, $P_2(x) = x^2 - 4x + 5$

Question 2

a) évident

b) pas de difficulté particulière en utilisant la formule de Leibniz

c) évident en utilisant 1-a et 2-b

Question 3

a) Par récurrence, on démontre que $P_n^{(k)}=(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$ Donc $P_n^{(k)}(1)=(-1)^k n!$

b) Pas de problème particulier pour trouver $\lim_{n\to+\infty}\frac{P_n(x)}{n!}=e^{1-x}$

Exercice 3

Question 1

$a_1 = 0$, $a_2 = p^2$, $a_3 = p^2q$, $a_4 = p^3q + p^2q^2$

Question 2

Démonstration par récurrence en utilisant le fait que :

- Si F est le résultat au premier lancer, alors on se retrouve avec l'événement ($X = n-1$) ensuite ;
- Si P est le résultat au premier lancer, alors il faut F au second lancer ($n \geq 3$), puis on se retrouve avec l'évènement ($X = n-2$) ensuite.

Question 3

a) évident

b) évident en utilisant, pour $q < 1$, $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

c) $E(X) = 15/4$ et $V(X) = 93/16$

Exercice 4

Question 1

Cas 1 : $k = 2$, Dim Ker $f = 2$ et Dim Im $f = 2$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ forment une base de } Ker f . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ forment une base de } \operatorname{Im} f$$

Cas 2 : k différent de 2 , Dim Ker $f = 1$ et Dim Im $f = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \textit{ forme une base de } Ker f . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ forment une base de } \operatorname{Im} f$$

Question 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

Question 1

La criminalité entre 1994 et 1995 a diminué de 6,47%. Sur la même période, la délinquance de voie publique a également diminué de 5,88%.

Question 2

Le taux annuel moyen de croissance de la criminalité entre 1990 et 2000 est de +0,77%.

Question 3

Sur la décennie étudiée, la criminalité a augmenté dans des proportions plus importante que la population (+7,99% pour la criminalité et +3,77% pour la population). La représentation graphique la plus appropriée pour comparer ces deux évolutions est de tracer les deux courbes sur le même graphique : on constate alors que la criminalité est bien plus forte jusqu'en 1995 et que les deux courbes se « confondent » presque sur la période 96-99 et que l'on observe un écartement des deux courbes en 2000.

Question 4

Le taux de criminalité en 2000 s'élève à 64,21 faits pour 1.000 habitants. Pour 1990, ce taux est de 61,69 faits. On retrouve ici le résultat de la question précédente : la criminalité a progressé plus vite que la population.

Question 5

Pour l'année 2000, la part de chacune des catégories dans la criminalité est :

- vols : 61,90%
- infractions économiques et financières : 9,33%
- atteintes aux personnes : 6,75%
- autres infractions : 22,02%

Le « camembert » est la représentation graphique la plus adéquate ici.

Question 6

Ile de France, Provence-Alpes-Côte-d'Azur, Rhône-Alpes et Nord-Pas-de-Calais

Question 7

659.296 personnes majeures.

Exercice 2

Pas de corrigé type mais on pourrait observer :

- la criminalité globale en 2000 se situe, en volume, à un niveau nettement inférieur à celui de 1994 et sensiblement égal à celui de 1991 ;
- le taux de criminalité s'établit à 64,21 faits pour 1.000 habitants en 2000 ;
- les vols forment la catégorie d'infractions majoritaire dans la criminalité ;
- les infractions économiques et financières ont fortement diminué au cours de la décennie ;
- plus d'un quart des faits ont lieu dans la région Ile de France ;
- la part de la délinquance de voie publique se situe autour de 50% ;
- la part des mineurs dans les personnes mises en cause a augmenté au cours de la décennie ;
- ….

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Tous les problèmes et les exercices sont indépendants.

Problème 1

L'objet du problème est l'étude des polynômes f_n de la variable réelle x tels que l'on ait :

$$(1)\ \forall x \in R \qquad f_n(x) - f_n(x-1) = x^n \ et\ f_n(0) = 0, \forall n \in N$$

N.B. – Pour n donné, on admettra l'existence et l'unicité du polynôme f_n remplissant les conditions (1).

Question 1 – Démontrer que :

a) f_n est de degré $(n+1)$.

b) f_n est divisible par $(x+1)$ pour n supérieur ou égal à 1.

c) Pour tout entier strictement positif p, on a, quel que soit l'entier naturel n,

$$(2)\ \ f_n(p) = 1^n + 2^n + 3^n + ... + p^n$$

Question 2 – Soit $f_n^{'}(x)$ la dérivée de $f_n(x)$.

a) Démontrer que l'on a, pour n supérieur ou égal à 1

$$(3)\ \forall x \in R \qquad f_n^{'}(x) - nf_{n-1}(x) = f_n^{'}(0)$$

b) En déduire que l'on a, toujours pour n supérieur ou égal à 1

$$(4)\ \forall x \in R \qquad f_n(x) = n\int_0^x f_{n-1}(t)dt + nx\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt$$

Question 3

a) Calculer $f_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3.

b) En déduire les expressions des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{i=p} i \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{i=p} i^2 \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{i=p} i^3$$

Problème 2

A tout entier naturel n, n strictement positif, on associe la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [1;+\infty[\qquad f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$, ln désignant le logarithme népérien.

Question 1 – Etude des fonctions f_n

a) Calculer la limite de f_n en $+\infty$.

b) Calculer la fonction dérivée $f_n'(x)$ sur $[1 ; +\infty[$.

c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f_n' est nulle ?

d) Donner le tableau de variation de f_n .

e) Calculer en fonction de n la valeur maximale y_n de f_n .

Question 2 – Etude de la suite y_n , n supérieur ou égal à 1

a) Calculer, pour $x > 1$, le rapport $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$

c) En déduire que $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$

d) Montrer que $y_n \leq \dfrac{1}{2^n e}$

e) Donner la limite de la suite y_n

Question 3 – Etude des primitives des fonctions f_n

A tout entier naturel n , n strictement positif, on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$

a) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, montrer que : $0 \leq I_n(\beta) \leq (\beta - 1)y_n$.

b) En déduire la limite de $I_n(\beta)$ quand n tend vers + ∞.

c) Démontrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

d) En déduire que : $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - ... - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$

e) Exprimer, pour n supérieur ou égal à 1 et x supérieur ou égal à 1, $Z_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(\ln x)^i}{i!}$ en fonction de $I_n(x)$

f) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, déterminer la limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers +∞.

g) En déduire la limite L de la suite S_n de terme général : $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$

Exercice 1

Dans une cage, il y a 5 lions et 7 tigres. On ouvre la porte de la cage, et les félins sortent tous les uns après les autres. On suppose que tous les ordres de sortie sont équiprobables.

a) Calculer la probabilité que le premier animal qui sorte soit un tigre.

b) Calculer la probabilité que tous les lions sortent avant les tigres.

c) Calculer le nombre d'ordres de sortie possibles, si on ne distingue pas les lions entre eux, ni les tigres entre eux.

Exercice 2

Un message expédié par l'émetteur A le jour J arrive à son destinataire B, suivant la loi de probabilité explicitée ci-après :

Arrivée le jour J+1 avec la probabilité 0,1
Arrivée le jour J+2 avec la probabilité 0,3
Arrivée le jour J+3 avec la probabilité 0,4
Arrivée le jour J+4 avec la probabilité 0,2

Tous les messages expédiés suivent la même loi de probabilité, de façon indépendante les uns des autres. On suppose les jours numérotés 0, 1, 2, 3,…

a) A expédie son message le jour 0. Soit X le jour où B reçoit le message, calculer E(X).

b) Le jour même de l'arrivée du message, B renvoie immédiatement à A un accusé de réception. Soit Y le jour où A reçoit l'accusé de réception, calculer E(Y) et donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 3

On considère les trois équations différentielles suivantes :

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad (2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2 = 0 \qquad (3)$$

On désigne respectivement par S_1, S_2 et S_3 les ensembles des fonctions réelles solutions sur R respectivement des équations (1), (2) et (3).

a) Démontrer l'inclusion $S_1 \cup S_2 \subset S_3$

b) Démontrer que l'inclusion réciproque est fausse.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Les pays en voie de développement : éléments communs et diversité.

Sujet n° 2

La Politique peut-elle faire abstraction de la Morale ?

Sujet n° 3

Dans le cadre de la Mondialisation et de ses effets sur les économies et les sociétés, quelles sont les chances de l'Afrique ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Croissance et développement.

Sujet n° 2

Les candidats sont invités à prêter attention au barème de notation.

MICROECONOMIE (10 points)

I Le Producteur en concurrence parfaite

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/4}\ q_2^{1/4}$$

Soient p le prix de l'output et p_1, p_2 les prix respectifs des deux inputs.

1) Quelle est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez.

2) Après avoir rappelé sa définition, calculez le taux marginal de substitution technique.

3) Après avoir rappelé sa définition, tracez l'isoquante passant par le panier (16, 16).

4) Après avoir donné l'équation du profit du producteur, calculez ses demandes d'inputs pour des prix d'inputs et d'output quelconques.

5) Donnez sa fonction d'offre concurrentielle pour $p_1 = p_2 = 1$. Interprétez.

II Le monopole

Soit une entreprise en situation de monopole. Sa fonction de coût total est donnée par :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 + \frac{16}{3}$$ où q est la quantité du bien produit.

La demande du bien qu'elle produit est donnée par :

$$d(p) = 15 - p$$

1) Quelle(s) hypothèse(s) change(nt) dans le modèle du monopole par rapport au modèle de concurrence parfaite ?

2) Donnez les définitions économique et mathématique des fonctions de coût marginal et de coût moyen. Tracez-les et interprétez graphiquement.

3) Quel est le seuil de rentabilité du monopole ? Interprétez.

4) Expliquez économiquement et calculez le choix de production optimal du monopole.

5) Quel est alors son profit ? Représentez très succinctement l'aire représentant ce profit sur un autre graphique.

6) Comparer son choix avec celui qu'il aurait fait en concurrence parfaite.

III L'échange

Soient deux consommateurs A et B dont les préférences sont représentées par la même fonction d'utilité : $U(q_1, q_2) = q_1 \ q_2^2$

Le consommateur A possède le panier $Q_A = (2, 2)$ et B possède le panier $Q_B = (1, 2)$.
1) Ont-ils intérêt à échanger ? Pourquoi ?

2) Représentez l'ensemble des échanges possibles entre ces deux agents dans une boîte d'Edgeworth (on considère donc que la quantité totale de biens disponibles est donnée par $Q_A + Q_B$).

3) Après avoir rappelé la définition d'un optimum de Pareto, tracez l'ensemble de ces optima de Pareto dans la boîte d'Edgeworth tracée précédemment.

4) Donnez l'équation de la courbe des contrats.

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (3 points)

Soit une entreprise qui dispose de fonds propres et qui doit choisir entre investir ou placer ses fonds au taux d'intérêt en vigueur noté *i* et établi à 10%.

L'investissement est d'une valeur ***I*** = 2000, possède une durée de vie de deux ans et ne peut être revendu. L'entreprise anticipe que le rendement de cet investissement sera de 1200 la première année et de 1000 la deuxième année.

1) Après avoir rappelé sa définition, donnez la valeur actuelle nette de l'investissement. L'entreprise choisit-elle d'investir ?

2) Donnez le taux de rendement interne de l'investissement. Interprétez.

3) Que se passe-t-il si l'entreprise ne dispose pas de fonds propres mais doit emprunter pour réaliser cet investissement ?

4) Que fait-elle si le taux d'intérêt passe à 6%? En déduire la forme de la fonction d'investissement.

Questions (7 points)

1) La fonction de consommation keynésienne : enjeux et limites. **(5 points)**

2) Les anticipations rationnelles. (**2 points**)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : L'épreuve est composée de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent. La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

Attention : Le tableau 3, dûment complété dans le cadre de l'exercice 2, devra être remis avec votre copie.

Exercice 1

1) D'après les données du tableau 1, calculer les taux bruts de mortalité (définis comme le rapport du nombre de décès durant une année donnée, à la population moyenne de cette année) du Royaume-Uni et de la Côte d'Ivoire pour 2001. Commenter.

2) Calculer le nombre de décès qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Côte d'Ivoire, si ce pays avait les taux de mortalité par âge du Royaume-Uni. Commenter.

Tableau 1 - Données Population et mortalité

	Côte d'Ivoire			Royaume-Uni		
Age	Population en 2001	Décès en 2001	Taux bruts de mortalité (en ‰)	Population en 2001	Décès en 2001	Taux bruts de mortalité (en ‰)
<1	544.130	73.900	135,8	645.170	3.569	5,5
1-4	1.921.980	25.764	13,4	2.801.530	618	0,2
5-14	4.339.460	11.242	2,6	7.732.450	961	0,1
15-24	3.571.960	19.286	5,4	7.223.660	3.573	0,5
25-34	2.157.190	35.399	16,4	8.420.970	6.112	0,7
35-44	1.520.950	29.959	19,7	9.132.020	12.068	1,3
45-54	1.078.630	21.771	20,2	7.847.850	26.750	3,4
55-64	698.250	19.435	27,8	6.335.340	56.813	9,0
65-74	376.540	20.849	55,4	4.931.980	124.728	25,3
75-84	124.430	15.084	121,2	3.294.350	214.389	65,1
+ de 85	14.331	3.503	244,4	1.175.390	195.161	166,0
Total	16.347.851	276.192		59.540.710	644.742	

Exercice 2

On dispose d'une table de survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et suivies à partir de leur naissance (âge 0).

Tableau 2 - Table de survie

i	âge (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge Sx_i
1	0	1000
2	10	850
3	20	800
4	30	750
5	40	650
6	50	530
7	60	430
8	70	330
9	80	180
10	90	5
11	100	0

1) Calculer :

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant l'âge de 40 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder après l'âge de 70 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder entre 30 et 60 ans.

- la probabilité pour une personne venant de naître et dont la loi de mortalité serait celle que traduit le tableau 2, de décéder avant 30 ans ou après 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 20 ans d'atteindre l'âge de 60 ans.

- la probabilité pour une personne ayant atteint l'âge de 30 ans de décéder avant l'âge de 80 ans.

2) On définit la variable d(x,x+a) comme étant le nombre de décès entre deux âges séparés de a années. De même, on définit la variable aq_x comme étant le rapport entre d(x,x+a) et le nombre de survivants à l'âge x. En utilisant les données du tableau 2, calculer d(x,x+10) et $10q_x$ pour chacune des classes d'âge du tableau **(pour ce faire, vous compléterez le tableau 3 que vous remettrez avec votre copie)**.

3) On définit l'espérance de vie à l'âge x par la formule suivante :

$e_x = x + \frac{1}{S_x}\sum_{i=k}^{10} d(x_i, x_i + 10) * (\frac{x_i + x_{i+1}}{2} - x)$ où i est défini dans le tableau 2, k étant la valeur de l'indice i dans le tableau 2 correspondant à l'âge x (exemple : pour le calcul de e_{20}, espérance de vie à 20 ans, k=3).

Calculer e_0 et e_{70}. Interpréter.

Exercice 3

Le tableau 4 donne le nombre d'entrées dans un parc de loisirs et le prix moyen du billet de 1985 à 2004.

Tableau 4

ANNEE	*ENTREES* (millions)	*PRIX BILLET* (euros)
1985	355	2,10
1986	328	2,22
1987	312	2,52
1988	292	2,87
1989	276	3,13
1990	235	3,78
1991	203	4,37
1992	184	5,41
1993	184	6,62
1994	179	8,57
1995	177	11,21
1996	179	13,37
1997	175	16,01
1998	202	20,48
1999	191	23,45
2000	175	24,94
2001	168	26,96
2002	137	27,66
2003	125	29,12
2004	121	31,45

1) Tracer la courbe du nombre d'entrées. Commenter le graphique, en distinguant trois périodes dans l'évolution.

   Par lecture graphique, déterminer approximativement le nombre d'entrées pour 2005.

2) On veut étudier la relation existant entre le nombre d'entrées et le prix du billet. On utilisera, pour cela, l'information des années 1985, 1989, 1993, 1997, 2001 et 2004.

   On veut montrer que l'évolution du nombre d'entrées dépend de l'évolution relative du prix du billet par rapport à l'indice général des prix : par exemple, le nombre des entrées baisse quand le prix du billet augmente plus vite que l'indice général des prix (IGP).

   L'IGP, base 100 en 1985, est le suivant sur les années retenues :

1989	:	123,9
1993	:	171,2
1997	:	307,9
2001	:	569,9
2004	:	695,7

   Calculer les indices du prix relatif du billet P suivant la formule :

$$P = 100 \text{ x (indice du prix du billet / IGP)}$$

3) Représenter sur un graphique les couples (indice du prix relatif du billet P**,** nombre d'entrées E). Commenter.

   Tracer la droite ajustant au mieux l'ensemble des points tracés : E = 450 - 1,3 P

   Sachant que le prix du billet a subi en 2005 la même hausse qu'en 2004 et que l'indice général des prix a augmenté de 3,1 % de 2004 à 2005, estimer à partir de la relation précédente, le nombre d'entrées en 2005. Comparer au résultat obtenu à la question 1.

   Que pensez-vous des deux méthodes ?

TABLEAU 3

(A RENDRE IMPERATIVEMENT AVEC VOTRE COPIE)

i	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge Sx_i	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10qx_i$
1	0	1000		
2	10	850		
3	20	800		
4	30	750		
5	40	650		
6	50	530		
7	60	430		
8	70	330		
9	80	180		
10	90	5		
11	100	0		

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Question 1

a) Soit p le degré de f_n

Si p est nul alors $\forall x \in R \quad f_n(x) - f_n(x-1) = 0 \neq x^n$ donc impossible

Si p est non nul, on pose $a_p x^p$ comme terme de plus haut degré de f_n avec a_p différent de 0

On recherche le terme de plus haut degré de $f_n(x) - f_n(x-1)$ qui est $pa_p x^{p-1}$

On en conclut que $n = p$-1 et que $pa_p = 1$

f_n est donc bien de degré n+1

b) D'après (1), on a $f_n(0) - f_n(-1) = 0$, or $f_n(0)=0$ donc $f_n(-1)=0$. la valeur -1 est donc racine de f_n, donc f_n est divisible par x+1

c) Démonstration par récurrence en utilisant la formule (1)

Question 2

a) En utilisant la formule (1), on a :

$\forall x \in R \qquad f_n'(x) - f_n'(x-1) = nx^{n-1}$

Mais $\quad x^{n-1} = f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x-1)$ toujours en utilisant (1)

Donc $\quad f_n'(x) - nf_{n-1}(x) = f_n'(x-1) - nf_{n-1}(x-1)$

Donc $\quad \forall x \in N \quad f_n'(x) - nf_{n-1}(x) = f_n'(0)$

Cette propriété, vraie sur N, est vraie aussi sur R compte tenu que $f_n'(x) - nf_{n-1}(x) - f_n'(0)$ est un polynôme de degré n au plus qui admet un nombre fini de racines.

Pour démontrer (4), il suffit de démontrer que $f_n^{'}(0) = n\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt$ (par intégration de la formule (3) entre 0 et x).
De même, par intégration de la formule (3) entre 0 et -1, on a :
$f_n(-1) = 0 = n\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt - f_n^{'}(0)$, d'où le résultat.

Question 3

a) $f_0(x) = x$
$f_1(x) = x(x+1)/2$
$f_2(x) = x(x+1)(2x+1)/6$
$f_3(x) = x^2(x+1)^2/4$

b) $S_1 = \sum_{i=1}^{i=p} i = \dfrac{p(p+1)}{2}$ $S_2 = \sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ $S_3 = \sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \dfrac{p^2(p+1)^2}{4}$

Problème 2

Question 1

a) La limite de f_n en $+\infty$ est 0
b) La fonction dérivée $f_n^{'}(x)$ est $f_n^{'}(x) = \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{n!x^3}(n - 2\ln x)$
c) $x = 1$ ou $x = e^{n/2}$
d) La fonction f_n est positive
e) La fonction f_n est maximale pour $x = e^{n/2}$. y_n est égal à $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$

Question 2

a) On trouve $\dfrac{\ln x}{n+1}$
b) Evident en écrivant
c) Evident car y_n est le maximum de f_n
d) Démonstration par récurrence
e) Comme $0 \le y_n \le \dfrac{1}{2^n e}$, la limite est nulle

Question 3

a) En utilisant le fait que y_n est le maximum de f_n, on montre que : $0 \le I_n(\beta) \le (\beta - 1) y_n$

b) La limite de $I_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est nulle

c) En intégrant $I_{n+1}(x)$ par parties (en posant u(t)=ln$t$ et v'(t)=$f_n(t)$), on démontre que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

d) Démonstration par récurrence

e) $Z_n(x) = x - x\, I_n(x)$

f) La limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$ est β

g) L = e

Exercice 1

a) La probabilité est égale à 7 / 12, soit 58,3%

b) La probabilité est égale à (5/12) x (4/11) x (3/10) x (2/9) x (1/8), soit à 0,126%

c) $C_{12}^{5} = 792$

Exercice 2

a) E(X) = 2,7 jours

b) E(Y) = 5,4 jours. La loi de probabilité de Y est la suivante :
P(Y=2)=0,01 P(Y=3)=0,06 P(Y=4)=0,17 P(Y=5)=0,28
P(Y=6)=0,28 P(Y=7)=0,16 P(Y=8)=0,04

Exercice 3

a) Soit f appartient à $S_1 \cup S_2$, donc f appartient à S_1 ou à S_2. Si f appartient à S_1, alors f est solution de (1), donc dérivable et $f'(x) - 2x = 0$, il est évident que f est alors solution de S_3. Idem si f appartient à S_2.

b) Soit la fonction $g(x) = 2|x|$. g est continue et admet donc une primitive G sur R. G est dérivable et, pour tout x réel, G'(x)=$g(x)$. G est solution de (3) et appartient à S_3.
On a, par ailleurs, G'(-1) – 2(-1) différent de 0, donc G n'appartient pas à S_1 sur R
G'(1) + 2(1) différent de 0, donc G n'appartient pas à S_2 sur R

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice n° 1

1) Pour l'année 2001, on a :

- TBM (Côte d'Ivoire) = 16,9‰
- TBM (Royaume-Uni) = 10,8‰ < TBM (Côte d'Ivoire)

Par tranche d'âge, tous les taux bruts de mortalité du Royaume-Uni sont inférieurs à ceux de la Côte d'Ivoire, souvent dans des rapports très importants (au moins 1 à 10 en dessous de 45 ans), alors que globalement le TBM du Royaume-Uni et le TBM de la Côte d'Ivoire sont dans un rapport de 1 à 2. Cela s'explique par la structure de la population, plus jeune en Côte d'Ivoire…

2) Le nombre de décès (arrondi à la centaine) qui seraient survenus dans chaque tranche d'âge en Côte d'Ivoire, dans l'hypothèse d'un taux de mortalité identique à celui du Royaume-Uni est donné ci-dessous :

Age	Nb de décès
<1	3000
1-4	400
5-14	400
15-24	1800
25-34	1500
35-44	2000
45-54	3700
55-64	6300
65-74	9500
75-84	8100
+ de 85	2400
Total	39100

Soit un TBM (Côte d'Ivoire) de 2,4‰, plus faible que celui constaté (16,9‰) et bien sûr très inférieur à celui du Royaume-Uni en raison de la structure de la population de la Côte d'Ivoire.

Exercice 2

1) P(D<40) = 0,35
P(D>70) = 0,33
P(30<D<60) = 0,32
P(D<30 ou D>60) = 0,68
P(D>60 sachant 20 ans) = 0,54
P(D<80 sachant 30 ans) = 0,76

2)

I	Age (exprimé en années) x_i	Nombre de survivants à cet âge Sx_i	Nombre de décès entre deux âges $d(x_i,x_i+10)$	$10qx_i$
1	0	1000	150	0,150
2	10	850	50	0,059
3	20	800	50	0,063
4	30	750	100	0,133
5	40	650	120	0,185
6	50	530	100	0,189
7	60	430	100	0,233
8	70	330	150	0,455
9	80	180	175	0,972
10	90	5	5	1,000
11	100	0		

3) e_0 = 50,25 ans
e_{70} = 10,61 ans
Une personne qui vient de naître a une espérance de vie de 50 ans. Une personne de 70 ans a encore près de 11 ans à vivre, en moyenne.

Exercice 3

1) La première période correspond aux années 1985-1992 : décroissance forte du nombre d'entrées ;
La seconde période correspond aux années 1992-1998 : stabilité du nombre d'entrées ;

La troisième période correspond aux années 1998 et suivantes : de nouveau décroissance mais cette fois-ci décroissance moins forte.

Graphiquement, le nombre d'entrées pour 2005 est proche de 110 millions d'entrées.

2)

	E (nombre d'entrées en millions)	P (indice du prix relatif)
1985	355	100
1989	276	120,3
1993	184	184,1
1997	175	247,6
2001	168	225,3
2004	121	215,3

3) Le prix du billet en 2005 est de 31,45 x 31,45/29,12, soit 33,97 euros. L'IGP en 2005 est de 695,7 x 1,031 soit 717,3. Donc P en 2005 vaut 225,5. Ce qui donne un nombre d'entrées de 157 millions.

Cette méthode donne un résultat qui sera très vraisemblablement contredit dans les faits car elle ne distingue pas les trois périodes constatées dans l'évolution du nombre d'entrées. Il aurait fallu faire l'étude proposée dans les questions 2 et 3 uniquement sur la période 1998-2004. L'estimation pour 2005 serait alors meilleure, et proche du résultat obtenu graphiquement à la question 1.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent. Un barème indicatif est donné.

Exercice 1 **(3,5 points)**

On considère l'application *f* de C dans C qui à tout complexe *z* associe le complexe *z'* tel que :

$$z' = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z$$

On pose : $z_0 = 1$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$ et, de façon générale, pour tout entier naturel *n* : $z_{n+1} = f(z_n)$.

1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $q = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$

2) Calculer z_1 , z_2 , z_3. On fournira les résultats sous forme algébrique et trigonométrique.

3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $z_n = \left(\frac{1+i}{3\sqrt{2}}\right)^n$.

   En déduire le module et un argument de z_n.

4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel *n*, z_n est-il :

   a) réel ?
   b) imaginaire pur ?

5) Calculer la limite, quand *n* tend vers l'infini, du module de z_n.

<u>Exercice 2</u> (3,5 points)

On définit, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$$

1) Calculer I_1.

2) Etablir pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$$

3) Montrer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4) Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!} + I_n$

5) On pose, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 : $u_n = \frac{2^n}{n!}$

a) Montrer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3 :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

b) En déduire que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3$

6) En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7) Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!}\right)$

Exercice 3 (2 points)

La publicité d'un nouveau véhicule automobile est axée sur sa longévité. L'un des slogans publicitaires est « pas de grosse réparation avant 150 000 km ». Le service des études techniques du constructeur a cependant fourni au service commercial les probabilités d'occurrence avant 150 000 km des 5 grosses pannes classiques, à partir de ses études de fiabilité. Pour les cardans cette probabilité est $p_1 = 0{,}001$, pour le moteur cette probabilité est $p_2 = 0{,}05$, pour l'embrayage elle est $p_3 = 0{,}01$, pour les freins on a trouvé $p_4 = 0{,}013$ et pour la boîte on a $p_5 = 0{,}03$. Quelle est la probabilité pour que le banc d'essai des revues spécialisées de l'automobile, ou des associations de consommateurs, prenne à défaut la publicité de ce nouveau modèle, après étude d'une seule voiture ?

Exercice 4 (2 points)

Un test de culture générale comportant 20 questions doit être passé par un candidat à un poste d'agent d'administration. Chaque question vaut 1 point et comporte 5 réponses possibles. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant totalement au hasard obtienne strictement plus de 2, sachant qu'aucune pénalité ne frappe les mauvaises réponses.

Exercice 5 (3 points)

Soient t un réel, X un vecteur de R^3 de coordonnées (x, y, z), et f_t la fonction de R^3 dans R^3 qui associe à tout vecteur X le vecteur de coordonnées $(x, y + tx, z + ty + \frac{1}{2} t^2 x)$

1) Donner la matrice F_t de la fonction f_t dans la base canonique.
2) Trouver la matrice J telle que $F_t = I + t J + \frac{1}{2} t^2 J^2$. I est la matrice identité de R^3.
3) Montrer que l'ensemble des matrices F_t muni du produit matriciel est un groupe commutatif.
4) Etudier la suite $S_n(t) = I + F_t + \frac{1}{2!} F_t^2 + \dots + \frac{1}{n!} F_t^n$
5) Donner les valeurs propres de F_t et les vecteurs propres associés.

Exercice 6 (3 points)

Déterminer les fonctions f continues et dérivables qui vérifient :

$$\forall (a,b) \in R^2 \quad \int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Pour vous aider, vous êtes invité à poser $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et à chercher à résoudre une équation différentielle de type $x^2 F''(x) + \alpha_1 x F'(x) + \alpha_2 F(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2$

<u>Exercice 7</u> (3 points)

Soit la fonction $f(x)=\int_{0}^{\pi/2}(\sin t)^{x}dt$ définie pour tout x, réel positif

1) Montrer que la fonction *f* est une fonction décroissante.
2) On pose *g*(x) = *x* *f*(x) *f*(x-1). Montrer que g est périodique de période 1.
3) Calculer *g(n)*, *n* étant un entier naturel.
4) Donner un équivalent de *f(n)*, *n* étant un entier naturel.
5) En déduire que la fonction *g* est constante.
6) En déduire un équivalent de *f*(x) en + ∞.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Quelles sont les grandes orientations de la politique étrangère des Etats africains ? Vous essayerez de dégager les signes d'une volonté unitaire.

Sujet n° 2

Quels sont les nouveaux Centres d'impulsion économiques et les nouveaux flux (commerciaux et migratoires) apparus avec la Mondialisation ?

Sujet n° 3

Commentez cette phrase de l'écrivain américain Samuel Huntington dans « Le choc des Civilisations et la Refonte de l'ordre mondial » 1996 : « Il est probable que les premières années du 21è siècle voient une résurgence de la puissance et de la culture non occidentale ainsi que le choc des peuples de civilisations non occidentales avec l'Occident et entre eux ».

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans quelle mesure l'Etat peut-il intervenir pour soutenir la croissance ?

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

Exercices

I Le Consommateur et l'offre de travail (6 points)

Soit le consommateur *A* dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(l, q) = l^{1/3}\ q^{1/3}$$

où l désigne la quantité de loisir et q la quantité de bien consommé.
Le temps disponible de ce consommateur est de 24h, soit $T = 24$.
Notons s le salaire et p le prix du bien de consommation.

1) Donnez l'équation de la contrainte budgétaire de *A*. Tracez cette contrainte ainsi que le vecteur de prix et interprétez.

2) Les préférences du consommateur sont-elles convexes ? Interprétez.

3) Donnez le taux marginal de substitution de *A*. Interprétez.

4) Ce consommateur est en situation de concurrence parfaite. Qu'introduit-on alors comme hypothèses ?

5) Calculez son choix optimal de concurrence parfaite et représentez le graphiquement sur le schéma précédent. Décrivez le type d'arbitrage auquel se livre le consommateur. Donnez son offre de travail optimale. Comment interpréter ce résultat ?

6) Supposons désormais que le salaire *s* augmente. Décrivez – sans calcul – l'effet de ce changement sur le choix optimal du consommateur (vous décomposerez notamment cet effet en effet revenu et effet substitution). Que peut-on dire de la forme de sa fonction d'offre de travail ?

7) Supposons désormais que *A* dispose d'une dotation de survie notée q_0. Tracez, sur un nouveau schéma, son ensemble de consommations possibles. Quel est alors son salaire de réserve ?

8) Quelle forme de chômage permet d'expliquer cette représentation de l'offre de travail en concurrence parfaite ?

II Le producteur (4 points)

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/2}\ q_2^{1/2}$$

Notons p, le prix de l'output et p_1, p_2 les prix respectifs des deux inputs.

1) Quelle est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez.

2) Après en avoir rappelé la définition, calculez le taux marginal de substitution technique du producteur.

3) Donnez l'équation du profit du producteur et calculez alors ses demandes optimales d'inputs en fonction des prix. Comment interpréter ce résultat ? Que peut-on en déduire quand à l'offre d'output de ce producteur ?

4) De manière plus générale, quels problèmes pose la présence de rendements constants en concurrence parfaite sur l'offre d'output ?

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (4 points)

Soit une économie à prix fixes formée de trois agents : Etat, entreprises et ménages. La fonction de consommation est donnée par :

$$C = 0.6Y^d + 200$$

où Y^d est le revenu disponible.

La fonction d'investissement est donnée par :

$$I = 200 - 1000i$$

où i est le taux d'intérêt.

La fonction de demande de monnaie est donnée par :

$$M^d = 0.4Y - 1000i$$

Le niveau des taxes T est de 100, celui des dépenses publiques G de 200 et celui de l'offre de monnaie M de 400.

1) Interprétez brièvement les différentes fonctions, ainsi que leur sens de variation.

2) Tracez les courbes d'équilibre du marché des biens et de la monnaie. Calculez l'équilibre global de cette économie.

3) Expliquez graphiquement les effets d'une politique budgétaire expansionniste sur l'équilibre global de cette économie. Précisez les mécanismes économiques à l'œuvre.

4) Expliquez graphiquement les effets d'une politique monétaire expansionniste sur l'équilibre global. Précisez les mécanismes économiques à l'œuvre.

Questions (6 points)

I) La théorie de la valeur travail chez A. Smith.

II) Le principe de la demande effective chez J. M. Keynes.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

On veut étudier l'évolution de la productivité horaire de l'industrie manufacturière de la France. On rappelle que la productivité horaire (dite « apparente ») est égale à la valeur ajoutée par heure travaillée. Pour des comparaisons portant sur plusieurs années, on part de la valeur ajoutée en prix constants (ici les prix de l'année 2000).

(a) Productivité horaire = (valeur ajoutée en volume) / (durée du travail x nombre d'emplois)

Le nombre d'heures travaillées sera mesuré à partir de la durée annuelle effective du travail des salariés et du nombre total d'emplois de la branche. Ceci revient à admettre que la durée du travail est identique pour les salariés et les non-salariés.

1) A l'aide des tableaux fournis en annexe, tracer sur 3 graphiques distincts l'évolution de 2000 à 2005 de la valeur ajoutée aux prix de 2000, de la durée du travail, de l'emploi de l'ensemble des branches.

2) Pour les années 2001 à 2005, calculer l'indice de la productivité horaire de l'ensemble des branches sur la base 100 en 2000. Tracer la courbe correspondante.

3) Graphiquement, estimer l'indice de productivité horaire de l'année 2010.

4) En utilisant la méthode des moindres carrées, extrapoler la durée du travail en 2010.

5) En vous référant à la définition (a), et dans l'hypothèse où la valeur ajoutée en volume augmente de 2,5% par an de 2006 à 2010, estimer le niveau de l'emploi en 2010.

6) Pour les années 2001 à 2005, calculer l'indice de la valeur ajoutée sur la base 100 en 2000. Sur un même graphique, les présenter ainsi que ceux de la productivité. Commenter.

7) Commenter les tableaux fournis en rédigeant un article d'une vingtaine de lignes sur l'évolution de la valeur ajoutée par branche.

Tableau 1 : Valeur ajoutée par branche en volume (prix chaînés, base 2000)

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	36,6	35,6	37,4	31,7	38,1	35,9	35,2
DB	Industrie (= EB à EG)	229,0	233,9	235,2	239,5	242,2	245,0	249,1
EB	Industries agricoles et alimentaires	26,5	25,5	25,9	27,7	27,9	28,1	28,8
EC	Industries des biens de consommation	36,2	38,2	38,3	37,7	37,3	38,0	38,6
ED	Industrie automobile	16,0	14,6	14,8	15,7	16,3	16,7	15,1
EE	Industries des biens d'équipement	45,2	46,4	45,8	46,0	48,1	49,2	52,2
EF	Industries des biens intermédiaires	79,5	80,8	80,4	82,0	81,5	81,8	82,6
EG	Energie	25,6	28,4	30,0	30,2	31,0	31,0	31,8
DH	Construction	66,6	68,9	68,0	67,4	68,5	70,8	72,8
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	684,2	697,4	708,4	722,1	741,3	757,1	774,5
EJ	Commerce	135,7	138,3	138,6	139,7	140,6	142,9	144,5
EK	Transports	52,8	52,2	53,3	53,7	56,5	57,4	58,8
EL	Activités financières	66,4	64,8	66,1	70,5	71,9	74,1	75,3
EM	Activités immobilières	158,8	164,7	165,6	168,0	174,0	177,3	182,3
EN	Services aux entreprises	202,7	206,7	213,0	217,4	225,1	230,6	238,2
EP	Services aux particuliers	67,9	70,6	71,8	73,0	73,6	75,4	75,8
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	274,4	277,9	277,4	278,7	283,7	286,5	289,3
EQ	Education, santé, action sociale	169,4	172,3	174,5	174,7	178,5	179,5	180,6
ER	Administration	104,9	105,6	102,9	103,9	105,2	106,9	108,7
TOTAL	**Ensemble**	1 290,7	1 313,6	1 326,4	1 339,5	1 374,5	1 396,7	1 422,5

Milliards d'euros 2000

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

Tableau 2 - Durée annuelle du travail des salariés par branche

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	1 567,1	1 600,4	1 586,5	1 561,5	1 580,9	1 605,5
DB	Industrie (= EB à EG)	1 582,2	1 557,1	1 525,5	1 524,2	1 549,2	1 545,7
EB	Industries agricoles et alimentaires	1 536,8	1 520,4	1 484,0	1 494,6	1 497,2	1 498,7
EC	Industries des biens de consommation	1 602,7	1 580,2	1 559,4	1 551,7	1 575,7	1 572,5
ED	Industrie automobile	1 561,9	1 537,2	1 523,4	1 515,9	1 550,3	1 538,3
EE	Industries des biens d'équipement	1 605,7	1 585,0	1 551,1	1 549,0	1 580,9	1 573,5
EF	Industries des biens intermédiaires	1 598,6	1 564,6	1 526,3	1 524,2	1 555,0	1 553,6
EG	Energie	1 455,7	1 442,7	1 433,1	1 440,5	1 454,1	1 453,0
DH	Construction	1 759,6	1 736,0	1 695,8	1 688,5	1 722,4	1 709,7
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	1 525,8	1 520,2	1 489,2	1 480,6	1 503,6	1 492,9
EJ	Commerce	1 546,7	1 523,4	1 498,2	1 490,7	1 507,3	1 502,3
EK	Transports	1 629,3	1 647,5	1 618,4	1 590,5	1 630,3	1 624,6
EL	Activités financières	1 508,2	1 486,7	1 440,6	1 449,2	1 491,1	1 486,8
EM	Activités immobilières	1 584,3	1 636,7	1 597,3	1 582,2	1 600,4	1 591,3
EN	Services aux entreprises	1 511,5	1 520,7	1 491,4	1 484,5	1 512,1	1 502,9
EP	Services aux particuliers	1 459,5	1 437,9	1 402,6	1 394,6	1 402,9	1 375,2
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	1 336,0	1 325,1	1 273,2	1 277,9	1 310,5	1 308,1
EQ	Education, santé, action sociale	1 245,6	1 236,9	1 202,6	1 216,3	1 247,1	1 244,8
ER	Administration	1 494,3	1 483,2	1 407,6	1 396,9	1 432,3	1 429,7
TOTAL	**Ensemble**	**1 490,6**	**1 481,0**	**1 443,3**	**1 439,1**	**1 465,7**	**1 458,9**

Heures annuelles par salarié

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

Tableau 3 - Emploi intérieur total par branche (Nombre de personnes)

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	961,1	945,3	928,3	912,3	905,6	891,2
DB	Industrie (= EB à EG)	3 866,4	3 900,4	3 826,2	3 737,8	3 635,8	3 548,0
EB	Industries agricoles et alimentaires	567,8	570,9	577,8	580,5	567,0	558,8
EC	Industries des biens de consommation	662,0	651,8	620,9	596,1	567,5	540,8
ED	Industrie automobile	224,4	232,1	231,1	232,4	224,7	219,5
EE	Industries des biens d'équipement	799,9	805,1	790,5	768,3	759,9	755,7
EF	Industries des biens intermédiaires	1 403,0	1 434,8	1 400,6	1 360,4	1 314,0	1 269,7
EG	Energie	209,2	205,7	205,3	200,1	202,7	203,4
DH	Construction	1 464,3	1 506,0	1 527,4	1 535,7	1 558,2	1 604,7
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	10 924,0	11 299,0	11 490,8	11 554,0	11 627,6	11 741,7
EJ	Commerce	3 183,3	3 256,6	3 320,6	3 372,7	3 398,9	3 402,1
EK	Transports	1 054,1	1 093,4	1 108,6	1 112,6	1 111,5	1 111,4
EL	Activités financières	728,5	744,8	763,2	768,2	763,8	765,2
EM	Activités immobilières	252,3	249,6	254,6	256,5	258,3	266,9
EN	Services aux entreprises	3 736,3	3 909,4	3 924,0	3 885,8	3 919,2	3 988,7
EP	Services aux particuliers	1 969,5	2 045,2	2 119,7	2 158,2	2 176,0	2 207,5
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	7 116,4	7 113,9	7 146,1	7 210,3	7 249,5	7 303,0
EQ	Education, santé, action sociale	4 634,9	4 667,1	4 781,4	4 846,5	4 865,7	4 907,6
ER	Administration	2 481,5	2 446,9	2 364,7	2 363,8	2 383,9	2 395,4
TOTAL	**Ensemble**	**24 332,1**	**24 764,6**	**24 918,7**	**24 950,2**	**24 976,7**	**25 088,6**

Milliers de personnes

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

Tableau 4 - Productivité horaire du travail par branche

	Intitulés	2000	2001	2002	2003	2004	2005
DA	Agriculture, sylviculture, pêche	-2,6	-0,1	11,8	-13,4	20,7	-4,6
DB	Industrie (= EB à EG)	6,3	2,8	4,5	4,2	2,3	4,0
EB	Industries agricoles et alimentaires	0,7	-3,8	2,5	5,5	2,5	3,5
EC	Industries des biens de consommation	13,6	8,5	6,5	2,9	2,1	7,2
ED	Industrie automobile	7,3	-10,1	2,7	5,9	4,7	5,6
EE	Industries des biens d'équipement	5,7	3,2	2,8	3,5	3,6	3,2
EF	Industries des biens intermédiaires	6,1	1,5	4,5	5,0	0,9	4,0
EG	Energie	1,8	13,9	6,8	2,7	0,4	-0,4
DH	Construction	2,9	1,9	-0,9	-0,8	-2,4	1,1
DJ	Services principalement marchands (= EJ à EP)	3,3	-0,9	2,1	2,0	0,5	2,0
EJ	Commerce	5,4	1,2	0,0	-0,2	-1,2	1,9
EK	Transports	0,2	-5,7	2,5	2,2	2,6	1,9
EL	Activités financières	13,4	-3,2	2,7	5,2	-0,3	3,2
EM	Activités immobilières	8,2	1,8	1,0	1,6	1,4	-0,8
EN	Services aux entreprises	-1,1	-3,1	4,8	3,5	0,7	1,4
EP	Services aux particuliers	2,4	2,1	1,2	1,0	-0,7	3,0
DQ	Services administrés (= EQ à ER)	2,1	2,1	3,2	-0,8	-1,2	0,5
EQ	Education, santé, action sociale	2,2	1,7	1,5	-2,2	-0,7	0,0
ER	Administration	1,8	2,8	6,2	1,8	-2,1	1,3
TOTAL	**Ensemble**	**3,5**	**0,8**	**3,1**	**1,2**	**0,7**	**1,7**

Evolution par rapport à l'année précédente en % (Valeur Ajoutée / Volume d'heures travaillées)

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1) Le module de q est 1/3 et un argument de q est π/4.
2) $z_1 = (e^{i\pi/4})/3$, $z_2 = (e^{i\pi/2})/9$, $z_3 = (e^{i\pi})/27$.
3) Pas de difficulté pour la récurrence. Le module de z_n est égal à $(1/3)^n$ et un argument est nπ/4.
4) a) z_n est réel pour les entiers naturels multiples de 4 (de la forme 4k).
   b) z_n est imaginaire pur pour les entiers naturels pairs non multiples de 4 (de la forme 4k+2).
5) La limite, quand tend vers l'infini, du module de z_n est nulle.

Exercice n° 2

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$$

1) Par intégration par partie, on trouve $I_1 = e^2 - 3$
2) Pas de difficulté en partant du fait que x est compris entre 0 et 2 et en utilisant le fait que la fonction puissance est une fonction croissante.
3) Démonstration par récurrence en utilisant l'intégration par parties.
4) Démonstration par récurrence.
5) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à 2/(n+1) qui est inférieur à ½ pour tout pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, d'où le résultat demandé.
   b) Démonstration par récurrence.
6) La limite de la suite (u_n) es nulle, ainsi que celle de la suite (I_n) en utilisant la question 2.
7) En utilisant la question 4 et la question 6, on montre le résultat demandé.

Exercice n° 3

Les pannes sont indépendantes les unes des autres. La probabilité demandée est égale à :

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5) = 10\%$$

Exercice n° 4

Le nombre de réponses justes suit une loi binomiale de paramètre n = 20 et p = 0,2. On cherche P(X > 2) qui est égal à 1 – P(X=0) – P(X=1) – P(X=2). Après calculs, on trouve 0,794.

Exercice n° 5

Soit t un réel, X un vecteur de R^3 de coordonnées (x, y, z), et la fonction f_t de R^3 dans R^3 qui associe à tout vecteur X le vecteur de coordonnées (x, y + tx, z + ty + ½ t^2 x)

1) $F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$

2) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Pas de difficulté et on démontre que $F_t F_{t'} = F_{t+t'}$

4) On montre que $F_t^k = F_{kt}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n(t) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ te & e & 0 \\ \frac{t^2 e}{2} & te & e \end{pmatrix}$

5) λ = 1 est valeur propre d'ordre 3. Si t est différent de 0, un vecteur propre est (0, 0, 1). Si t = 0, alors $F_t = I$.

Exercice n° 6

On dérive la formule proposée par rapport à b et par rapport à a et on fait la différence.
On fixe ensuite a=0 et b=x pour obtenir l'égalité suivante :

$$x^2 f'(x) - 6xf(x) + 12\int_0^x f(t)dt = 6xf(0) + x^2 f'(0)$$

En posant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, il nous faut résoudre l'équation différentielle

$$x^2 F''(x) - 6xF'(x) + 12F(x) = 6\lambda x + \mu x^2$$

On cherche une fonction particulière de la forme F(x) = ax^2 + bx + c. On trouve
$F(x) = \frac{\mu}{2}x^2 + \lambda x$

La solution générale (x^2F''- 6xF'+12F = 0) s'obtient en utilisant la formule d'Euler (F(x) = x$^\beta$). On trouve β=3 ou β=4.

On a $F(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{\mu}{2}x^2 + \lambda x$
f(x) est donc un polynôme de degré 3. $f(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + \mu x + \lambda$

Exercice n° 7

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ définie pour tout x, réel positif

1) t fixé, la fonction (sint) puissance x est décroissante, d'où le résultat.

2) Par intégration par parties, on montre que g(x+1)=g(x), car (x+1) f (x+1) = x f (x-1)

3) $g(n) = g(1) = \pi/2$.

4) On montre que $\frac{g(n+1)}{n+1} \leq f^2(n) \leq \frac{g(n)}{n}$. Donc $f(n)$ a pour équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

5) On a déjà démontré que g est constante sur l'ensemble des entiers naturels à la question 2. Pour le démontrer sur l'ensemble des réels, on commence par montrer que $f^2(n) \leq f(n)f(n-1) = \dfrac{\pi}{2n}$ et que $f^2(n+1) \geq f(n+1)f(n+2) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ (vraie du fait de la décroissance de la fonction).

En partant du fait que n ≤ x < n+1, on trouve un encadrement de f(x), donc de g(x).

$$\frac{n\pi}{2\sqrt{n(n+1)}} \leq g(x) \leq \frac{(n+1)\pi}{2\sqrt{n(n-1)}}$$

Ceci permet de trouver la limite de g(x) en +∞ (π/2 en l'occurrence).

La fonction g étant périodique de période finie non nulle et admettant une limite à l'infini, elle est constante sur R.

6) En utilisant de nouveau qu'il existe n tel que $n \leq x < n+1$ pour x réel, on a $g(x+1) \leq xf^2(x) < g(x)$. D'où l'équivalent de f(x) est $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

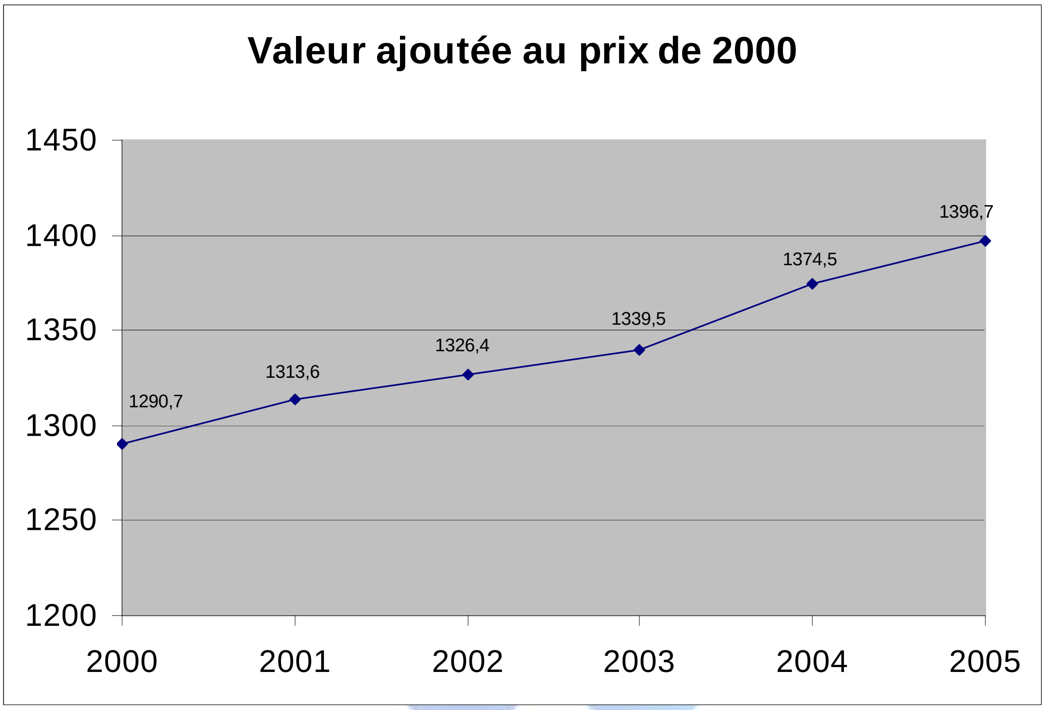
AVRIL 2008

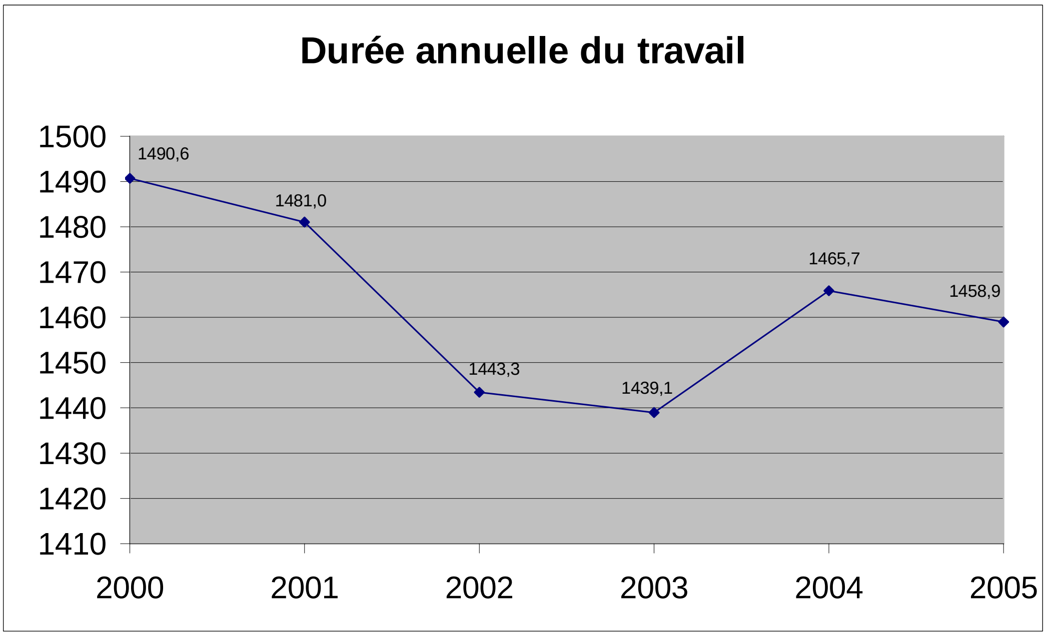
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

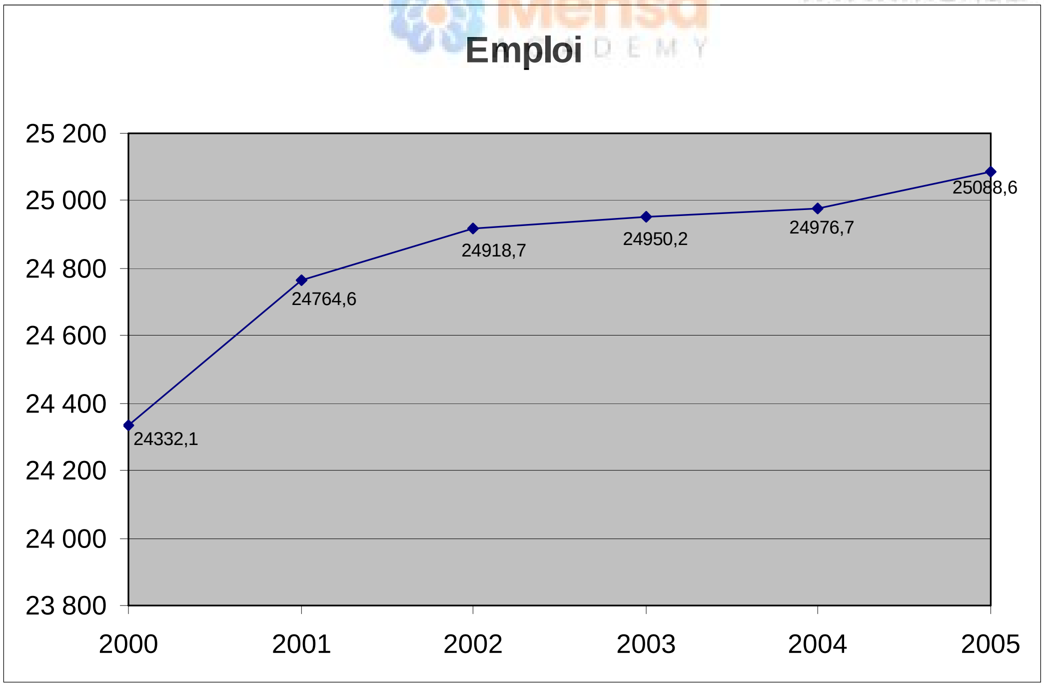
ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

1) Graphiques

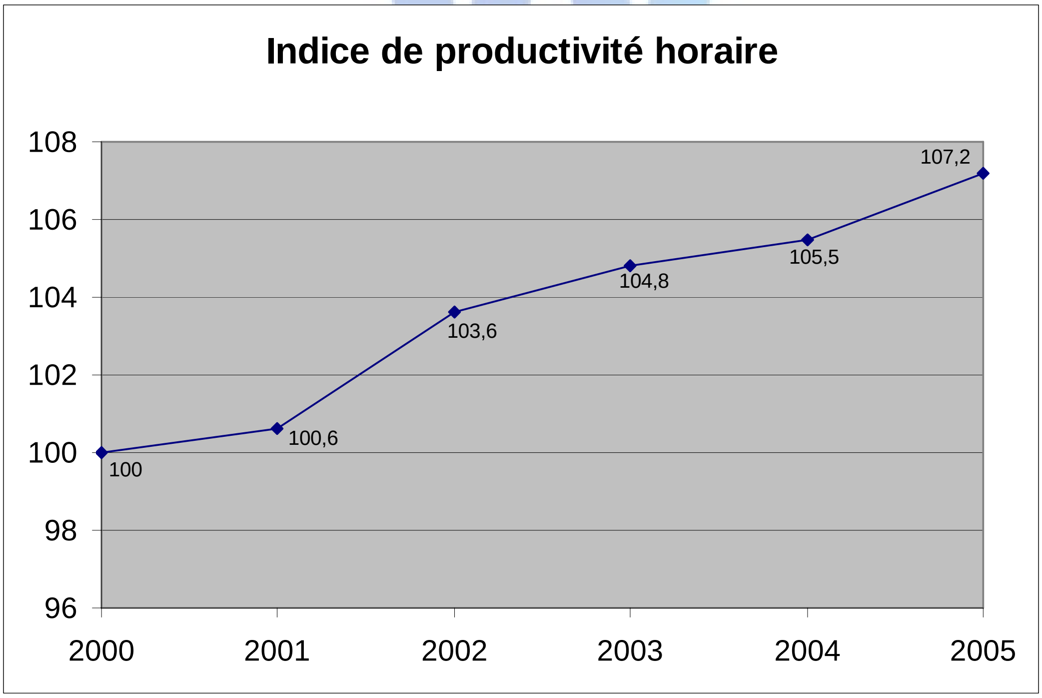






2)

Année	valeur	indice
2000	35,59	100,0
2001	35,82	100,6
2002	36,88	103,6
2003	37,31	104,8
2004	37,55	105,5
2005	38,16	107,2



3) environ 114

4) $D = -5a + 11\,475$ en posant a = 2010

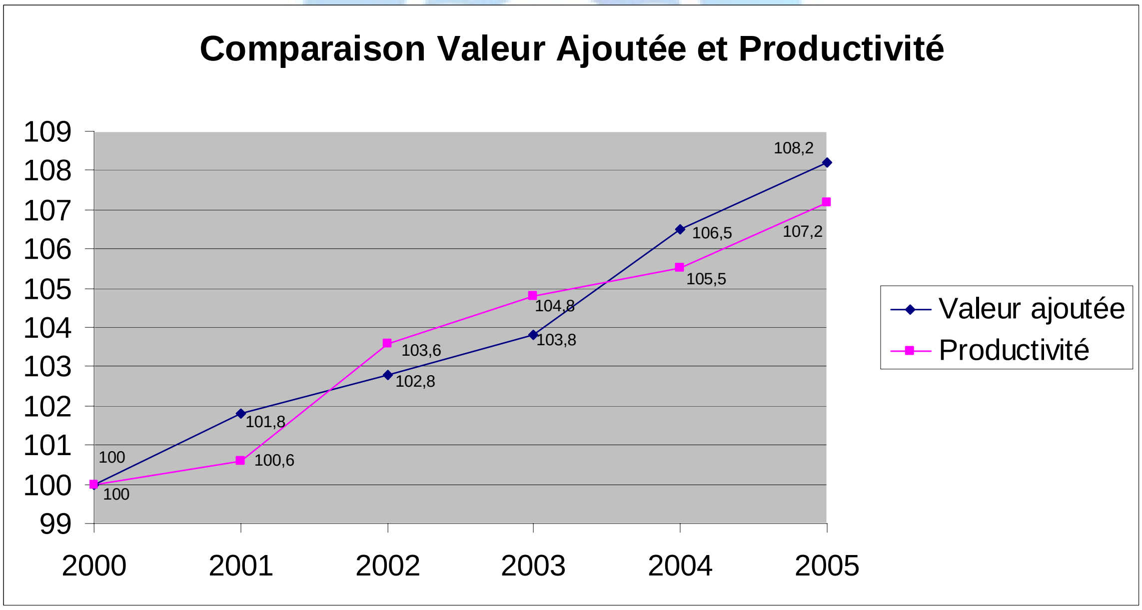
on trouve 1425 h

5) $VA_{2010} = 1422{,}5 \times (1{,}025)^4 = 1570{,}20$

$$emploi_{2010} = \frac{1570{,}2}{1425 \times 1{,}14 \times 35{,}59} = 27\,150 \text{ (milliers de personnes)}$$

6)

Année	Indice VA	Indice productivité
2000	100,0	100,0
2001	101,8	100,6
2002	102,8	103,6
2003	103,8	104,8
2004	106,5	105,5
2005	108,2	107,2



7) Pas de corrigé type

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \; ; \; v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

Question 1 : Calculer $u_1, v_1, u_2 \text{ et } v_2$.

Question 2 : Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique et calculer la raison.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

Question 3 : Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Question 4 : On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 2

Soient *f* et *g* deux applications de R (ensemble des réels) dans R définies par : $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ et $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

Question 1 : Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.

Question 2 : En déduire que $f + g^2$ est une fonction constante. Calculer cette constante.

Question 3 : Justifier que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Question 4 : Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Question 5 : En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Exercice 3

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes.

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule dans l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie il remet dans l'urne la ou les boule(s) tirée(s).

On définit les événements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » ;
D_2 : « le dé indique 2 » ;
D_3 : « le dé indique 3 » ;
G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A)$ est différent de 0, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Question 1 :

a. Déterminer les probabilités $p_{D1}(G)$, $p_{D2}(G)$ et $p_{D3}(G)$

b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$

Question 2 : Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Question 3 : Un joueur fait six parties.

a. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

b. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Problème

Une matrice A carrée d'ordre n dans R est nilpotente si et seulement si $A^n=0$

Partie I

Question 1 : Soit M une matrice carrée d'ordre n dans R triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire :

$M = [a_{ij}]$ avec pour $i \geq j \quad a_{ij} = 0$. Montrer que M est nilpotente.

Question 2 : Calculer M^n pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

Il s'agit, dans cette partie, de résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Question 1 : Ecrire le système *(S)* sous la forme matricielle : X ' = BX

Question 2 : La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

Question 3 : Montrer que les vecteurs $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B.

Question 4 : Donner le rang de l'endomorphisme (u – Id) où u est l'endomorphisme de R^3 associé à la matrice B et Id l'endomorphisme identité de R^3.

Question 5 : Calculer $(B - I_3)^2$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Question 6 : Montrer que e_1, vecteur de la base canonique de R^3, n'appartient pas à Ker (u – Id).

Question 7 : Montrer que (e_1, e_1', e_2') est une base de R^3.

Question 8 : Ecrire la matrice B dans la base (e_1, e_1', e_2') que l'on nommera T.

Question 9 : Démontrer qu'avec le changement défini par $X = PX_1$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_1', e_2') , le système *(S)* devient $X'_1 = TX_1$

Question 10 : Résoudre le système précédent.

Question 11 : En déduire les solutions de *(S).*

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

En quoi certains pays africains peuvent-ils constituer un effet d'entraînement pour tout le continent africain ? Vous prendrez des exemples comme l'Afrique du Sud ou d'autres pays de votre choix.

Sujet n° 2

Que vous inspire l'élection de Barack Obama comme Président des Etats-Unis ?

Sujet n° 3

Quels sont les aspects de la crise financière et économique mondiale actuelle qui vous ont le plus frappé ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les stratégies de croissance des pays émergents.

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

I Le Consommateur et l'offre de travail (6 points)

Soit le consommateur *A* dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1 \; q_2$$

1) Quelles sont les propriétés usuelles des préférences de cet agent ? Interprétez.

2) Donnez le taux marginal de substitution de *A*. Interprétez.

3) Supposons que R = 12, où R désigne le revenu de *A*. Supposons que p_1= 1 et p_2 = 1, où p_1, p_2 désignent respectivement les prix des biens 1 et 2. Calculez son choix optimal de concurrence parfaite.

4) Supposons désormais que p_2 = 2. Calculez le nouveau choix de concurrence parfaite de *A*, en décomposant l'effet total en effet de substitution et effet de revenu. Représentez-les graphiquement. Les biens sont-ils normaux ?

5) Rappelez ce qu'est un bien 'Giffen'.

II Le duopole de Cournot (4 points)

Les deux entreprises *A* et *B* forment un duopole de Cournot. Elles font face à une fonction de demande donnée par :

$$D(p) = 25 - \tfrac{1}{2}\, p = q_A + q_B$$

où *p* désigne le prix du bien produit, et *q* désigne la quantité produite.
Elles ont la même fonction de coût donnée par :

$$C(q) = 5q^2$$

1) Donnez la fonction de demande inverse.

2) Rappelez quelles sont les stratégies des entreprises.

3) Donnez leur fonction de profit.

4) Calculez r_A (.) et r_B (.), les fonctions de réaction de chacune.

5) Calculez l'équilibre.

6) Rappelez quelles sont les différences, dans les hypothèses et les résultats, entre duopole de Cournot et duopole de Bertrand.

MACROECONOMIE (10 points)

Exercice (4 points)

Soit la fonction de production agrégée d'une économie :

$$Y_t = K_t^{1/2} N^{1/2}$$

où l'emploi *N* est donc constant.

1) Quelles hypothèses usuelles vérifie cette fonction de production ?

2) Donnez la production par tête, notée y_t, en fonction du capital par tête, k_t.

3) La production est consommée ou épargnée, avec une propension à épargner constante *s*. Quelle est, à l'équilibre, la relation entre accumulation du capital et production, sachant que le capital se déprécie à un taux δ ? Interprétez.

4) Donnez alors k_{t+1} en fonction de k_t. Quelle est la valeur de ce capital par tête à l'état stationnaire ?

Questions (6 points)

1) La demande de monnaie keynésienne (2 points).

2) La courbe de Phillips : enjeux et limites (4 points).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

La bourse de Lidurie a une capitalisation boursière de 500.000.000 euros au 1er janvier 2007. Pour suivre l'évolution de la bourse au jour le jour, un indicateur construit sur la base d'un portefeuille de 10 valeurs a été constitué. Il est composé des 10 plus importantes capitalisations au 1er janvier de chaque année. Il s'appelle LID.

Les 10 sociétés qui composent le LID au 1er janvier 2007 ont une capitalisation de 16.610.000 euros (voir tableau 1).

Tableau 1

Composition du LID au 1er janvier 2007

LID 2007			
Société	**Cours 2007**	**Nb actions 2007**	**Capitalisation 2007**
D	30	65 000	1 950 000
O	50	39 000	1 950 000
E	42	45 000	1 890 000
K	26	70 000	1 820 000
L	44	40 000	1 760 000
C	45	37 000	1 665 000
V	33	47 000	1 551 000
P	3	500 000	1 500 000
J	37	37 000	1 369 000
X	33	35 000	1 155 000
		915 000	16 610 000

Partie° 1

Question 1 : Quel poids économique représente le LID par rapport à la capitalisation boursière du pays.

Question 2 : Au 1er janvier 2008, les 10 plus importantes capitalisations boursières ne sont plus représentées par les sociétés présentes dans le LID du 1er janvier 2007. Le tableau 2 donne les informations des 26 sociétés les plus importantes de Lidurie.

Tableau 2

	Année 2007 (1er janvier)			Année 2008 (1er janvier)		
Société	**Cours**	**Nb actions**	**Capitalisation**	**Cours**	**Nb actions**	**Capitalisation**
A	39	18 000	702 000	42	18 000	756 000
B	32	30 000	960 000	42	30 000	1 260 000
C	45	37 000	1 665 000	49	37 000	1 813 000
D	30	65 000	1 950 000	32	65 000	2 080 000
E	42	45 000	1 890 000	45	45 000	2 025 000
F	15	50 000	750 000	15	50 000	750 000
G	28	34 000	952 000	26	34 000	884 000
H	16	45 000	720 000	16	45 000	720 000
I	17	47 000	799 000	16	47 000	752 000
J	37	37 000	1 369 000	34	50 000	1 700 000
K	26	70 000	1 820 000	27	70 000	1 890 000
L	44	40 000	1 760 000	40	40 000	1 600 000
M	3	325 000	975 000	3	325 000	975 000
N	37	26 000	962 000	34	26 000	884 000
O	50	39 000	1 950 000	54	39 000	2 106 000
P	3	500 000	1 500 000	3	500 000	1 500 000
Q	41	25 000	1 025 000	38	25 000	950 000
R	27	37 000	999 000	27	37 000	999 000
S	14	57 000	798 000	13	57 000	741 000
T	13	73 000	949 000	13	73 000	949 000
U	30	30 000	900 000	32	30 000	960 000
V	33	47 000	1 551 000	32	47 000	1 504 000
W	8	88 000	704 000	9	88 000	792 000
X	33	35 000	1 155 000	36	34 000	1 224 000
Y	18	43 000	774 000	18	43 000	774 000
Z	38	22 000	836 000	38	22 000	836 000
Total		**1 865 000**	**30 415 000**		**1 877 000**	**31 424 000**

Commenter ce tableau en distinguant 4 ensembles :

- l'ensemble des sociétés présentes dans le LID au 1er janvier 2007 et qui restent dans les 10 plus grandes capitalisations boursières au 1er janvier 2008 ; (ensemble 1)
- les sociétés présentes dans le LID au 1er janvier 2007 et qui ne font plus partie des 10 plus grandes capitalisations boursières au 1er janvier 2008 ; (ensemble 2)
- les sociétés absentes du LID au 1er janvier 2007 et qui font parties des 10 plus importantes capitalisations boursières au 1er janvier 2008 ; (ensemble 3)
- les autres (ensemble 4)

Vous préciserez les noms des sociétés présentes dans chaque ensemble et expliciterez l'indicateur « contribution à l'évolution » du tableau 3 qui a été établi pour vous aider. Vous êtes invité à calculer d'autres indicateurs pour étayer vos commentaires.

Tableau 3

	Année 2007 (1er janvier)			Année 2008 (1er janvier)				
Société	**Cours**	**Nb actions**	**Capitalisation**	**Cours**	**Nb actions**	**Capitalisation**	**Evolution 08/07**	**Contribution Evol**
C	45	37 000	1 665 000	49	37 000	1 813 000	1,089	19,4%
D	30	65 000	1 950 000	32	65 000	2 080 000	1,067	17,0%
E	42	45 000	1 890 000	45	45 000	2 025 000	1,071	17,7%
J	37	37 000	1 369 000	34	50 000	1 700 000	1,242	43,4%
K	26	70 000	1 820 000	27	70 000	1 890 000	1,038	9,2%
L	44	40 000	1 760 000	40	40 000	1 600 000	0,909	-21,0%
O	50	39 000	1 950 000	54	39 000	2 106 000	1,080	20,4%
P	3	500 000	1 500 000	3	500 000	1 500 000	1,000	0,0%
V	33	47 000	1 551 000	32	47 000	1 504 000	0,970	-6,2%
Total		**880 000**	**15 455 000**		**893 000**	**16 218 000**	**1,049**	

Question 3 : Détailler l'évolution de l'entreprise J entre le 1er janvier 2007 et le 1er janvier 2008.

Partie° 2

Les personnes en charge de la composition du LID au 1er janvier 2009 examinent comment se présentent les choses à partir des cours au 1er novembre 2008. Ils constatent que le LID au 1er janvier 2009 risque de voir 3 sociétés entrantes donc 3 sortantes également.

Le tableau 4 montre ce que pourrait donner le LID au 1er janvier 2009 avec les cours au 1er novembre 2008.

Tableau 4

LID 2009 (prévision)			
Société	**Cours au 1/11/2008**	**Nb actions**	**Capitalisation au 1/11/2008**
D	28	65 000	1 820 000
E	38	45 000	1 710 000
O	37	39 000	1 443 000
J	26	50 000	1 300 000
K	16	70 000	1 120 000
C	30	37 000	1 110 000
L	25	40 000	1 000 000
X	28	34 000	952 000
R	24	37 000	888 000
T	11	73 000	803 000
		490 000	12 146 000

La capitalisation boursière était de 550.000.000 d'euros au 1er janvier 2008 et est de 400.000.000 d'euros au 1er novembre 2008.

Question 1 : Commenter le tableau 4.

Question 2 : Calculer les « contributions à l'évolution » de la capitalisation boursière des 10 valeurs figurant dans le tableau 4. Commenter.

Question 3 : a) Estimer la capitalisation boursière du LID au 1er janvier 2009 si l'évolution constatée entre le 1er janvier 2008 et le 1er novembre 2008 se poursuit.

b) Expliquer la méthode de calcul que vous utiliseriez pour donner le poids économique du LID au 1er janvier 2009 par rapport à la capitalisation boursière du pays.

Question 4 : Quelles valeurs du LID au 1er janvier 2007 un investisseur aurait dû acheter pour optimiser son portefeuille de 3 valeurs ?

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1 :

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}, v_1 = \frac{v_0 + u_1}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}, v_2 = \frac{v_1 + u_2}{2} = \frac{59}{16}$$

Question 2 :

a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= \frac{v_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1}$$

$$= \frac{v_n - u_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{v_n - \frac{u_n + v_n}{2}}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n$$

Donc :

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ donc pour tout entier naturel *n*, $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit :

$$\boxed{w_n = \frac{1}{4^n}}.$$

La suite (w_n) converge vers 0 car c'est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre – 1 et 1 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0}$$

Question 3 :

Pour tout entier *n*, on a $w_n = \frac{1}{4^n}$ donc pour tout entier *n*,

$$w_n = v_n - u_n > 0 .$$

Pour tout entier *n*, $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n$ donc pour tout entier *n*,

$u_{n+1} > u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier *n*,

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4} w_n$ donc pour tout entier *n*, $v_{n+1} < v_n$ c'est-à-dire la suite (v_n) est décroissante.

L'une des deux suites est croissante, l'autre est décroissante et la suite différence des deux suites a pour limite 0 donc :

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes et ont la même limite.

Question 4 :

a. Pour tout entier *n*, $t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n + u_{n+1}}{3} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$

La suite (t_n) est constante et pour tout entier *n* : $\boxed{t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}}$

b. La suite (t_n) étant constante elle est convergente et a pour limite $t_0 = \frac{11}{3}$.

Mais pour tout entier *n*, on a $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Soit ℓ la limite commune à (u_n) et (v_n).

La suite $\left(\dfrac{u_n + 2v_n}{3}\right)$ est convergente et a pour limite $\dfrac{\ell + 2\ell}{3}$ donc $\dfrac{\ell + 2\ell}{3} = \dfrac{11}{3}$ donc : $\boxed{\ell = \dfrac{11}{3}}$

Exercice 2

Question 1 : On pose $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc de classe C^1. f est donc de classe C^1 sur R avec :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$$

Donc avec le changement de variable défini par *u* = *xt*, on obtient :

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2g'(x)g(x).$$

Question 2 : On déduit de la question précédente que $f + g^2$ est constante donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x)^2 = f(0) + g(0)^2 = f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ car } f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = Arctg\,1 - Arctg\,0$$

Question 3 : On a $g(x)^2 = \dfrac{\pi}{4} - f(x)$ **(1)**.

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\forall t \in [1,+\infty[,\ e^{-t^2} \le e^{-t}$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Question 4 : En remarquant que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a $0 \le \varphi(x,t) \le \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, on obtient $\displaystyle 0 \le f(x) \le e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Question 5 : En conséquence la relation **(1)** donne :

$\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} g^2(x) = \frac{\pi}{4}$ et en tenant compte de la positivité de la fonction exponentielle, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3

Question 1 :

a. Si le dé indique 1, on tire une boule dans une urne contenant 4 voyelles et 6 consonnes et on gagne si on tire une voyelle. On obtient :

$$\boxed{p_{D1}(G) = \frac{2}{5}}$$

Si lé dé indique 2, on tire deux boules simultanément et on gagne si on tire deux voyelles. On obtient :

$$\boxed{p_{D2}(G) = \frac{2}{15}}$$

Si le dé indique 3, on tire trois boules simultanément et on gagne si on tire trois voyelles. On obtient :

$$\boxed{p_{D3}(G) = \frac{1}{30}}$$

b. On utilise la formule des probabilités totales, on obtient :

$p(G) = p_{D1}(G)p(D_1)+p_{D2}(G)p(D_2)+p_{D3}(G)p(D_3) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{30}\times\frac{3}{6}$ et donc : $\boxed{p(G) = \frac{23}{180}}$

Question 2 : Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$p_G(D_1) = \frac{p(G \cap D_1)}{p(G)} = \frac{p_{D1}(G)\times p(D_1)}{p(G)}$, soit $\boxed{p_G(D_1)=\frac{12}{23}}$

Question 3 :

a. On fait une succession de six épreuves indépendantes pour lesquelles la probabilité de succès est $p = \frac{23}{180}$. On sait que le nombre X de succès suit une loi binomiale de paramètre (6 ; p).

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est donc :

$$\boxed{p(X = 2) = C_2^6\, p^2\,(1-p)^4 = 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

b. La probabilité de gagner au moins une partie est : $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n$

On veut $p(X \geq 1) \geq 0{,}9$ soit $\left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0{,}1$.

Et on obtient $\boxed{n \text{ minimal égal à } 17}$

Problème

Partie I

Question 1 : soit *f* l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de R^n composée des vecteurs $(e_1,\ldots\ldots,e_n)$:

$$\forall j \in [2,n], \quad f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots\ldots,e_{j-1}), \quad f(e_1) = 0$$

On en déduit, pour $3 \leq j \leq n$:

$$f^2(e_j) \in \mathrm{Vect}(f(e_1),\ldots, f(e_{j-1})) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\ldots\ldots,e_{j-2})$$

$$\forall j \in [3,n],\ f^2(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{j-2}),\ et\ f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0$$

$$\forall j \in [k+1,n],\ f^k(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_{j-k}),\ f^k(e_1) = f^k(e_2) = \ldots = f^k(e_k) = 0$$

D'où pour $k = n,\ f^n(e_1) = f^n(e_2) = \ldots. = f^n(e_n) = 0,$ c'est-à-dire $f^n = 0$ et donc $A^n = 0.$

Question 2 : on a $M = I_3 + D$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D est nilpotente d'après la question 1 et on a $D^3 = 0$, la formule du binôme donne :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^k = I_3 + nD + \frac{n(n-1)}{2} D^2$$

d'où $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

Question 1 : Le système (*S*) s'écrit : *X' = BX* avec *B* = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Question 2 : $\det(B - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3$. 1 est donc valeur propre triple, *B* n'est pas diagonalisable, (sinon $B = I_3$), par contre elle est trigonalisable.

Question 3 : Il suffit de calculer $\left(B-\lambda I_3\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\left(B-\lambda I_3\right)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Nous trouvons dans les deux cas le vecteur nul.

Question 4 : D'après la question 2, la dimension de $Ker\left(u-Id\right)$ est inférieure ou égale à 2 (sinon, B serait diagonalisable). Les deux vecteurs de la question 3 appartiennent au sous-espace vectoriel $Ker\left(u-Id\right)$ et ne sont pas liés, ils forment donc une base de $Ker\left(u-Id\right)$. La dimension de $Ker\left(u-Id\right)$ est donc égale à 2. En conséquence, la dimension de $Im\left(u-Id\right)$ est égale à 1. Le rang de $\left(u-Id\right)$ est donc de 1.

Question 5 : Evident. La matrice B-I_3 est donc nilpotente.

Question 6 : Il suffit de calculer $\left(B-\lambda I_3\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et de montrer que le résultat n'est pas le vecteur nul.

Question 7 : Evident en utilisant la question précédente et le fait que $(e_1^{'}, e_2^{'})$ forme une base de $Ker\left(u-Id\right)$.

Question 8 : La matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, e_1^{'}, e_2^{'})$ est $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

En calculant $P^{-1}BP$, on obtient la matrice désirée *T* qui est égale à $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Question 9 : $X^{'} = BX \Rightarrow PX_1^{'} = BPX_1$ en utilisant le changement de variable. En utilisant le fait que P est inversible, on prouve le résultat demandé.

Question 10 : En développant, on a :

$$(S_1)\quad : \quad \begin{cases} x_1^{'} = x_1 & (1)\\ y_1^{'} = 2x_1 + y_1 & (2)\\ z_1^{'} = -x_1 + z_1 & (3)\end{cases}$$

La ligne (1) donne $x_1 = ae^t$. On change dans (2) qui devient $y_1^{'} = y_1 + 2ae^t$ ce qui donne $y_1 = (2at+b)e^t$. De même, avec (3), on trouve $z_1 = (-at+c)e^t$

Question 11 :

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ (2at+b)e^t \\ (-at+c)e^t \end{pmatrix}$

$$x = (2at+b+a)e^t \quad , \quad y = (-at+c)e^t \quad , \quad z = (at+b+c)e^t .$$

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Partie 1

Question 1 : $\frac{16.610.000}{500.000.000} = 3{,}32$ %

Question 2 :

- L'ensemble 1 est constitué des sociétés D, O, E, K, L, C, V, P, J.

L'évolution de la capitalisation boursière de cet ensemble est de 4,9% alors qu'elle est de 3,3% pour l'ensemble des 26 sociétés. L'entreprise J a procédé a une mise sur le marché d'un plus grand nombre d'actions (augmentation de capital sans doute).

- L'ensemble 2 est constitué de la société X.

Le cours de cette société est passé de 33 à 36 euros mais cette société a du procéder a un rachat d'actions (- 1 000) qui fait que la société B est passée devant elle.

- L'ensemble 3 est constitué de la société B.

Le cours de l'action de cette société a augmenté de façon importante de 32 à 42 euros.

- L'ensemble 4 est constitué des autres sociétés. RAS

L'indicateur « contribution à l'évolution » indique, à l'intérieur des 9 sociétés présentes dans le LID 2007 et qui devraient être présentes dans le LID 2008, quelles sont leurs contributions à l'évolution de 4,9% constatée entre 2007 et 2008. Par exemple la société J est celle qui contribue le plus à l'augmentation des 4,9% alors que la société L contribue négativement. C'est ainsi que la somme des contributions fait 100 % par définition.

Question 3 :

L'entreprise J a procédé à une mise sur le marché de 13 000 actions supplémentaires. Bien que le marché ait réagi par une baisse des prix de l'action, sa capitalisation boursière a augmenté de 24,2%.

Partie 2

Question 1 : les 3 entrantes sont : R, T, X

Les 3 sortantes sont : B, P, V

Question 2 :

Les résultats figurant dans les deux colonnes ci-dessous sont acceptés. La première est établie par référence au champ des 10 valeurs qui composeraient le LID au 1er janvier 2009 et la seconde par référence à l'ensemble des valeurs boursières.

Société	Contrib1	Contrib2
D	6,13%	0,17%
E	7,43%	0,21%
O	15,64%	0,44%
J	9,43%	0,27%
K	18,16%	0,51%
C	16,58%	0,47%
L	14,15%	0,40%
X	6,42%	0,18%
R	2,62%	0,07%
T	3,44%	0,10%

Commentaires : Parmi les 10 sociétés composant le LID, les 4 sociétés qui contribuent le plus à l'évolution de la capitalisation boursière sont, dans l'ordre, K puis C puis O, puis L. La société K a notamment vu son cours chuter de 27 euros à 16 euros.

Question 3 : a) $\left(\frac{400.000.000}{550.000.000}\right)^{12/10} \times 550.000.000 = 375.318.050$

b) Pour chacune des 10 valeurs du tableau 4, il faut estimer la capitalisation boursière au 1er janvier 2009 de la même façon que ce qui a été fait pour l'ensemble à la question 3a). On somme ensuite les 10 chiffres obtenus et on termine en faisant le rapport entre cette somme et le résultat de la question 3a). Pour information, on obtient 3,06 %. Or, il était de 3,32 % au 1er janvier 2007 (question 1 – partie 1). Le mouvement baissier constaté au cours de l'année 2008 a été plus important pour ce panel de 10 entreprises que pour l'ensemble des sociétés (1ère explication) ou il y a eu l'introduction d'entreprises nouvelles (ou d'actions nouvelles) depuis le 1er janvier 2007 justifiant que prendre les 10 plus importantes réduit leur poids (2ème explication).

Question 4 : D dont le cours n'a baissé que de 6,67%

E « « « 9,52%

X « « « 15,15%

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice n° 1

On se propose de calculer les intégrales de Wallis définies pour n appartenant à N, ensemble des entiers naturels, par:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt \qquad K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt \qquad L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt$$

Question 1 : Calcul de I_n

a) Calculer $I_0 \; et \; I_1$ puis trouver une relation de récurrence entre $I_n \; et \; I_{n+2}$

b) Donner I_n en fonction de n

Question 2 : Calcul de J_n

a) Trouver une relation entre $J_n \; et \; I_n$

b) Donner J_n en fonction de n

Question 3 : Calcul de K_n

a) Trouver une relation entre $K_n \; et \; I_{2n+1}$

b) Donner K_n en fonction de n

Question 4 : Calcul de L_n

a) Trouver une relation entre $L_n \; et \; K_n$

b) Donner L_n en fonction de n

Exercice n° 2

Trois personnes A, B et C jouent au ballon.

Si A possède le ballon, il le passe à B avec la probabilité de 1/3 et à C avec la probabilité de 2/3.

Si B possède le ballon, il le passe à A avec la probabilité de 1/3 et à C avec la probabilité de 2/3.

Si C possède le ballon, il le passe à A avec la probabilité de 1/3 et à B avec la probabilité de 2/3.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « A (resp. B, C) reçoit le ballon après le n$^{\text{ième}}$ échange » et $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$

On suppose qu'à l'instant initial, A possède le ballon. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 1 : Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$ et calculer ses vecteurs propres.

Question 2 : Calculer la probabilité que chacun des joueurs possède le ballon après le 5$^{\text{ième}}$ échange.

Question 3 : Montrer que la suite (M_n), définie par $M_n = M^n$, converge vers une certaine matrice M_∞ que l'on calculera. Interpréter $M_\infty X_0$.

Exercice n° 3

Une personne prend le bus pour se rendre à son travail. L'heure de son arrivée à la station de départ est uniformément répartie entre 7 et 8 heures du matin. Pour se rendre à son travail, il a le choix entre la ligne n°4 ou la ligne n°7 dont les heures de passage sont :

n°4 : 7h00 ; 7h15 ; 7h30 ; 7h45 ; 8h00   n°7 : 7h05 ; 7h20 ; 7h35 ; 7h50

Le voyageur monte dans le premier bus (n°4 ou n°7) qui se présente.

Question 1 : On désigne par X l'attente en minutes du voyageur.

a) Déterminer la fonction de densité f et la fonction de répartition F de X et les représenter graphiquement (conseil : pour calculer f , vous pouvez découper la tranche horaire 7h – 8 h en 12 tranches de 5 minutes).

b) Calculer la durée moyenne d'attente du voyageur.

Question 2 : La durée du voyage est de 15 minutes avec la ligne n°4 et 20 minutes avec la ligne n°7. Le voyageur met 10 minutes pour se rendre de son domicile à la station de départ, puis un temps négligeable pour se rendre de la station d'arrivée à son lieu de travail. On désigne par Y le temps total mis par le voyageur entre son domicile et son lieu de travail.

Calculer le temps moyen mis par le voyageur pour se rendre de son domicile à son lieu de travail.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Dans son livre *Race et histoire*, Lévi-Strauss constate que "l'humanité est constamment aux prises avec deux processus contradictoires dont l'un tend à instaurer l'unification [des cultures], tandis que l'autre vise à maintenir ou à rétablir la diversification", et il affirme pour sa part "la nécessité de préserver la diversité des cultures dans un monde menacé par la monotonie et l'uniformité". Que pensez-vous, à l'heure de la "mondialisation", de cette affirmation ?

Sujet n° 2

Quels sont les atouts dont dispose l'Afrique pour son développement économique, et quels sont les obstacles qui au contraire freinent ce développement ?

Sujet n° 3

Le poète romantique Vigny opposait, à la liberté de la nature, la servitude que l'homme s'est artificiellement imposée dans les villes, ces "cités serviles" où règne "l'esclavage humain". Que pensez-vous de cette vision de la ville comme lieu de contrainte et de servitude ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les enjeux du libre-échange pour les pays en développement.

Sujet n° 2

I - Exercice de microéconomie (8 points)

Soit le consommateur A dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1^{1/2}\, q_2^{1/4.}$$

1) Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur A.

2) Ses préférences sont-elles convexes ? Interprétez cette propriété. En quoi est-elle déterminante ?

3) Donnez le taux marginal de substitution de A au panier de dotation initiale $Q_A^0 = (1, 4)$ Interprétez.

4) Soit un vecteur de prix quelconque (p_1, p_2). Calculez le choix optimal de concurrence parfaite de A. Représentez-le graphiquement. Interprétez.

5) Soit un second consommateur B avec les mêmes préférences que A mais avec des dotations initiales $Q_B^0 = (3, 3)$. Donnez son choix de concurrence parfaite.

6) Calculez la demande nette de bien 1.

7) Qu'est-ce que la loi de Walras ? En déduire la demande nette de bien 2.

8) Donnez un vecteur de prix d'équilibre. Quelle propriété d'efficacité possède cet équilibre ?

II - Exercice de macroéconomie (6 points)

Soit un gouvernement soucieux de réduire le chômage et les inégalités sans creuser son déficit budgétaire. Il s'agit de construire un modèle macro-économique de type IS-LM qui distingue les salariés et les capitalistes.

Soient T_1, les impôts payés par les salariés et T_2, ceux payés par les capitalistes.

Soient C_1 la consommation des salariés et C_2 celle des capitalistes.

Soient wN la masse salariale et Π le profit total de la période.

Les fonctions de consommation des salariés et des capitalistes sont alors données par :

$$C_1 = 200 + 0.8\,(wN - T_1)$$
$$C_2 = 400 + 0.6\,(\Pi - T_2)$$

Soit i le taux d'intérêt. La demande de monnaie est donnée par :

$$\Delta M_d = 0.02Y + 15 - i$$

L'investissement des entreprises I est financé par émissions de titres et est donné par :

$$I = 1100 - 60i$$

La dépense publique est notée G et l'offre de monnaie ΔM_s.

1) Comment expliquez vous les différences de fonction de consommation ?

2) Sachant que les parts respectives des salaires et des profits dans le PIB sont égales ($Y/2$ chacune), donnez la fonction de consommation globale en fonction de Y, T_1, T_2.

3) Donnez l'équilibre sur le marché des biens.

4) Donnez l'équilibre sur le marché de la monnaie.

5) Sachant que $G = 1036$, $\Delta M_s = 100$ et que $T_1 = T_2 = 240$, donnez le revenu d'équilibre global.

6) Donnez le nouveau revenu d'équilibre après une politique fiscale de redistribution telle que $T_1 = 100$ et $T_2 = 380$. Expliquez les mécanismes à l'œuvre ainsi que le résultat obtenu.

III - Questions (6 points)

1) Les deux théorèmes de l'économie du Bien Etre (1 point).

2) Après avoir rappelé la définition d'une externalité, expliquez quel(s) problème(s) pose sa présence dans un cadre standard de concurrence parfaite. Présentez succinctement les principaux instruments d'internalisation (3 points).

3) Présentation et enjeu de la théorie du revenu permanent (2 points).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice n° 1

On étudie la répartition des salaires mensuels d'une entreprise de N salariés. Pour chaque tranche de 1.000 francs, on connaît le nombre d'agents dont le salaire est dans cette tranche. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous (tableau 1).

Tableau 1

Répartition selon le salaire mensuel (en francs)

i	Tranche	n_i
1	[0 ; 1000[	15
2	[1000 ; 2000[	27
3	[2000 ; 3000[	85
4	[3000 ; 4000[	198
5	[4000 ; 5000[	255
6	[5000 ; 6000[	219
7	[6000 ; 7000[	65
8	[7000 ; 8000[	73
9	[8000 ; 9000[	38
10	[9000 ; 10000[	25

Question 1 : Calculer la moyenne et l'écart type du salaire mensuel.

Question 2 : Représenter graphiquement la fonction de répartition du salaire mensuel.

Question 3 : On note N_j la somme cumulée définie par $N_j = \sum_{i=1}^{j} n_i$ et $N'_j = \frac{N_j}{N_{10}}$. On note également $y_i = n_i\ x_i$, où x_i est le centre de classe et Y_j la somme cumulée définie par $Y_j = \sum_{i=1}^{j} y_i$. On définit enfin $Y'_j = \frac{Y_j}{Y_{10}}$. Par convention, on note $N_0 = N'_0 = Y_0 = Y'_0 = 0$. Soit M_j le point du plan cartésien de coordonnées (N'_j, Y'_j), avec M_0 de coordonnées (0,0). Donner dans un tableau, les coordonnées des points M_j avec quatre décimales.

Question 4 : On appelle ligne de concentration la ligne obtenue en joignant les points M_j. Soient O le point de coordonnées (0,0), A(1,0) et B(1,1). Tracer sur une même figure la ligne de concentration, les points O, A et B et la première bissectrice OB. On prendra comme unité $OA = AB = 10$ cm.

Question 5 : Commenter le graphique précédent.

Question 6 : On veut calculer l'indicateur statistique défini comme le rapport de l'aire comprise entre le segment OB et la ligne de concentration et l'aire du triangle OAB. Connaissez-vous cet indicateur ?

Question 7 : Donner la signification de cet indicateur, notamment lorsque celui-ci est nul.

Question 8 : En utilisant la courbe de la question 4, indiquer quel pourcentage de la masse salariale revient aux 20% des salariés les moins rémunérés de l'entreprise, aux 50% des salariés les moins rémunérés, aux 25% des salariés les mieux rémunérés.

Exercice n° 2

On étudie l'évolution des salaires en France en 2007 dans les entreprises.

Question 1 : A partir d'éléments donnés dans le tableau 2 ci-après, calculer un indice d'évolution des salaires bruts en euros courants pour une population que vous précisez.

Question 2 : Commenter chacun des trois tableaux ci-après (tableaux 2, 3 et 4).

Tableau 2

Salaires mensuels et horaires moyens et répartition des effectifs selon le sexe et la catégorie socio-professionnelle

	Salaires bruts			Salaires nets de tous prélèvements			Répartition des effectifs (%)	
	Euros courants		Euros constants	Euros courants		Euros constants		
	2006	2007	Evolution (%)	2006	2007	Evolution (%)	2006	2007
	SALAIRES MENSUELS DES POSTES A TEMPS COMPLET (et effectifs en années-travail)							
Ensemble	**2 580**	**2 661**	**1,6**	**1 938**	**1 997**	**1,5**	**100,0**	**100,0**
Cadres[1]	5 170	5 366	2,3	3 852	3 997	2,3	16,3	16,4
Prof. interm.	2 625	2 698	1,2	1 965	2 017	1,1	24,5	24,6
Employés	1 791	1 833	0,9	1 361	1 391	0,7	22,8	22,8
Ouvriers	1 883	1 928	0,9	1 422	1 459	1,0	36,3	36,2
Hommes	**2 755**	**2 842**	**1,6**	**2 072**	**2 138**	**1,6**	**100,0**	**100,0**
Cadres[1]	5 501	5 721	2,5	4 109	4 276	2,5	18,3	18,4
Prof. interm.	2 753	2 831	1,3	2 065	2 123	1,3	22,6	22,5
Employés	1 849	1 888	0,6	1 416	1 444	0,5	11,2	11,2
Ouvriers	1 930	1 975	0,8	1 457	1 495	1,1	47,9	48,0
Femmes	**2 248**	**2 323**	**1,8**	**1 684**	**1 736**	**1,6**	**100,0**	**100,0**
Cadres[1]	4 279	4 438	2,2	3 159	3 268	1,9	12,7	12,9
Prof. interm.	2 434	2 504	1,3	1 816	1 862	1,1	28,2	28,5
Employés	1 763	1 808	1,0	1 335	1 366	0,8	44,5	44,0
Ouvriers	1 599	1 640	1,1	1 211	1 239	0,8	14,6	14,6
Smic (151,67h)	**1 236**	**1 267**	**1,0**	**970**	**995**	**1,1**	-	-
	SALAIRES HORAIRES (et effectifs en nombre d'heures travaillées)							
Salariés à temps complet								
Hommes	17,83	18,38	1,6	13,41	13,82	1,6	65,8	65,5
Femmes	14,86	15,35	1,8	11,13	11,47	1,6	34,2	34,5
Ensemble	**16,81**	**17,34**	**1,6**	**12,63**	**13,01**	**1,5**	**100,0**	**100,0**
Cadres[1]	33,01	34,24	2,2	24,59	25,51	2,2	16,7	16,8
Prof. interm.	17,07	17,53	1,2	12,78	13,10	1,0	24,6	24,7
Employés	11,80	12,08	0,9	8,96	9,16	0,7	22,6	22,5
Ouvriers	12,33	12,62	0,8	9,31	9,55	1,0	36,1	36,0
Salariés à temps non complet								
Hommes	16,18	16,87	2,7	12,32	12,82	2,5	30,5	30,6
Femmes	13,01	13,45	1,8	9,78	10,09	1,7	69,5	69,4
Ensemble	**13,98**	**14,50**	**2,2**	**10,55**	**10,93**	**2,0**	**100,0**	**100,0**
Cadres[1]	28,89	29,87	1,8	21,46	22,21	1,9	11,4	12,2
Prof. interm.	16,33	16,74	1,0	12,31	12,60	0,8	18,6	18,5
Employés	10,77	11,03	0,9	8,16	8,34	0,7	48,0	47,9
Ouvriers	11,16	11,35	0,2	8,56	8,67	-0,2	22,0	21,4
Smic	**8,15**	**8,36**	**1,1**	**6,40**	**6,56**	**1,0**		

1. Y compris chefs d'entreprise salariés.
Champ : salariés du secteur privé et semi-public, France.
Source : Insee, DADS

Tableau 3

Evolutions annuelles, en euros constants, des salaires moyens
pour les emplois à temps complet

en %

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Salaire brut moyen[1]	**0,2**	**1,7**	**0,6**	**0,9**	**0,9**	**0,3**	**0,6**	**1,1**	**1,0**	**1,6**
Salaire moyen net de prélèvements	**0,9**	**1,6**	**0,5**	**1,1**	**0,6**	**-0,3**	**0,0**	**1,0**	**0,4**	**1,5**
Salaire brut moyen à structure constante	-0,1	1,1	0,0	0,2	0,1	-0,2	0,2	0,9	0,8	1,3
Salaire moyen net de prélèvements à structure constante	0,6	1,0	-0,1	0,4	-0,2	-0,8	-0,4	0,8	0,2	1,2
Incidence des effets de structure sur le salaire net	0,3	0,6	0,6	0,7	0,8	0,5	0,4	0,2	0,2	0,3
Pour mémoire : indice des prix à la consommation	*0,7*	*0,5*	*1,7*	*1,7*	*1,9*	*2,1*	*2,1*	*1,8*	*1,6*	*1,5*

1. Les variations des rémunérations non soumises à cotisations sociales (participation, intéressement) sont prises en compte dans les évolutions du salaire brut moyen seulement à partir de l'évolution 2001/2002.
Champ : salariés à temps complet du secteur privé et semi-public, France.
Source : Insee, DADS

Tableau 4

Distribution des salaires mensuels nets de tous prélèvements
En euros courants

Déciles	Ensemble		Hommes		Femmes	
	2006	2007	2006	2007	2006	2007
D1	1 059	1 083	1 097	1 123	1 004	1 029
D2	1 184	1 215	1 231	1 263	1 118	1 148
D3	1 296	1 330	1 351	1 387	1 210	1 243
D4	1 415	1 453	1 478	1 517	1 310	1 346
Médiane	**1 554**	**1 594**	**1 622**	**1 665**	**1 428**	**1 467**
D6	1 725	1 769	1 806	1 852	1 578	1 620
D7	1 955	2 004	2 064	2 115	1 775	1 823
D8	2 321	2 382	2 483	2 548	2 049	2 107
D9	3 079	3 163	3 356	3 448	2 582	2 662
D9/D1	**2,9**	**2,9**	**3,1**	**3,1**	**2,6**	**2,6**

Lecture : En 2007, 10% des salariés à temps complet du secteur privé et semi-public gagnent un salaire mensuel net inférieur à 1 083 euros, 20% un salaire inférieur à 1 215 euros.

Champ : salariés à temps complet du secteur privé et semi-public, France.
Source : Insee, DADS

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1 :

a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

b) En partant de le définition de I_{n+2} et en intégrant par parties, on trouve la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

c) Si *n* pair (*n=2p*) $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times .... \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$

Si n impair (n=2p+1) $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times .... \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

Question 2 :

a) En faisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, on trouve $J_n = I_n$

b) Même réponse que pour la question 1-c

Question 3 :

a) En faisant le changement de variable $u = Arc\sin t$, $K_n = 2I_{2n+1}$

b) $K_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Question 4 :

a) $L_n = (-1)^n K_n$

b) $L_n = \frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 2

$$X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 1 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcul des valeurs propres : les valeurs propres sont 1 ; (-1/3) ; (-2/3)

Calcul des vecteurs propres :

Pour la valeur propre 1, un vecteur propre est (5 ; 7 ; 8)
Pour la valeur propre (-1/3), un vecteur propre est (1 ; -1 ; 0)
Pour la valeur propre (-2/3), un vecteur propre est (0 ; 1 ; -1)

Question 2 : Il faut calculer $X_5 = M^5 X_0 = \begin{pmatrix} 20/81 \\ 73/243 \\ 110/243 \end{pmatrix}$

Question 3 : On doit calculer M^n en utilisant la diagonalisation et la formule $M=PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale semblable à M.

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-2/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \text{ avec}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 15 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand on fait tendre n vers l'infini,

$$M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le vecteur $M_\infty \ X_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,35 \\ 0,40 \end{pmatrix}$

Ce qui donne une tendance à long terme : A a le ballon 25% du temps, B 35% du temps et C 40 % du temps.

Exercice 3

Question 1 : On désigne par *X* l'attente en minutes du voyageur

a) En partageant l'heure (7h-8h) en 12 tranches de 5 minutes, on constate que le voyageur attend entre 0 et 10 minutes maximum. Sur les 12 tranches, il y a 8 pour lesquelles il attendra moins de 5 minutes et 4 pour lesquelles il attendra entre 5 et 10 minutes. Il y a donc 2 chances sur 3 d'attendre moins de 5 minutes et 1 chance sur 3 d'attendre plus de 5 minutes. L'heure d'arrivée étant uniformément répartie entre 7h et 8h, la fonction de densité *f* de *X* est :

$f(t) = \begin{cases} a \ si \ t \in [0;5[\\ b \ si \ t \in [5;10[\end{cases}$ où *a* et *b* sont des constantes qui vérifient *a* = *2b*

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, on en déduit 5a + 5b = 1, d'où b = 1/15

La fonction de répartition *F* de *X* est : *F(x)* = *P(X≤x)*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 \, si \, x \in]-\infty;0[\\ 2x/15 \, si \, x \in [0;5[\\ 1/3 + x/15 \, si \, x \in [5;10[\\ 1 \, si \, x \in [10;+\infty[\end{cases}$$

Les représentations graphiques ne sont pas faites.

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)dt = \frac{25}{6}$, soit 4 minutes et 10 secondes

Question 2 : On a *Y* = *10* + *X* + *M* où *M* est la durée du trajet en bus. *E(X)* a été calculé à la question précédente, il reste à calculer *E(M)*.

Sur les 12 tranches de 5 minutes, on remarque que le voyageur prend la ligne n°4 sur 8 tranches, on a donc p(*M*=15) = 2/3 et p(*M*=20) = 1/3

E(M) = 15 x 2/3 + 20 x 1/3 = 50/3

On en déduit que *E(Y)* = 185/6, soit une durée moyenne de 30 minutes et 50 secondes.

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

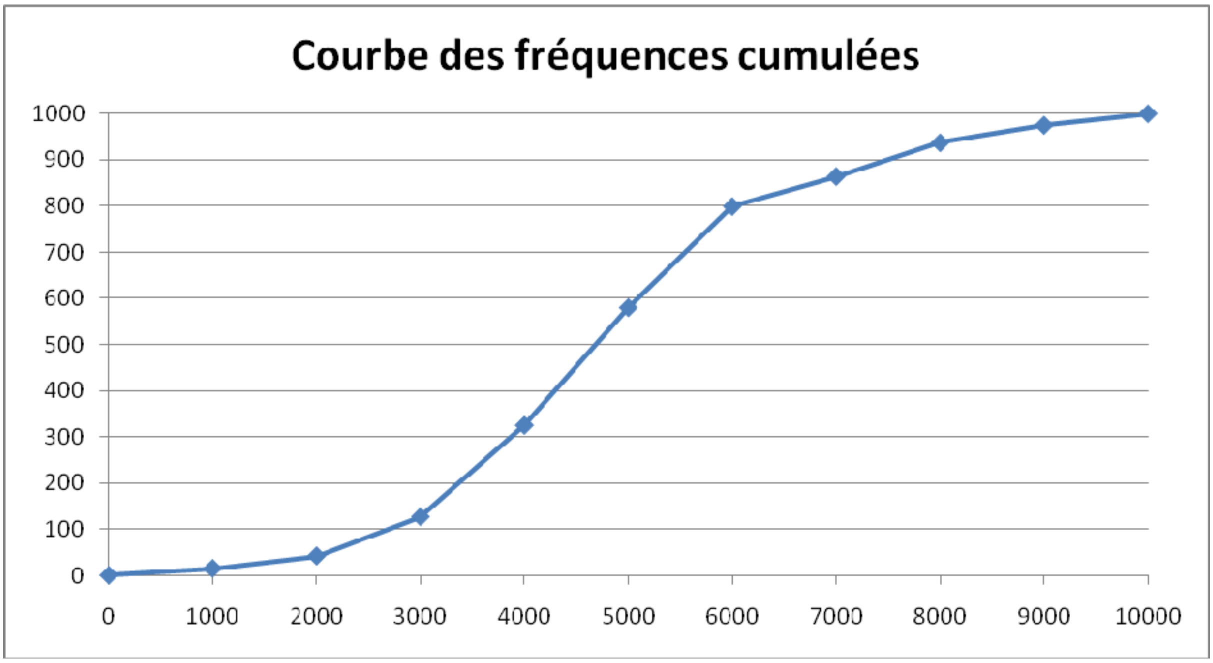
ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

Question 1 : E(X) = 4.836 francs et σ(X) = 5.163,72 francs

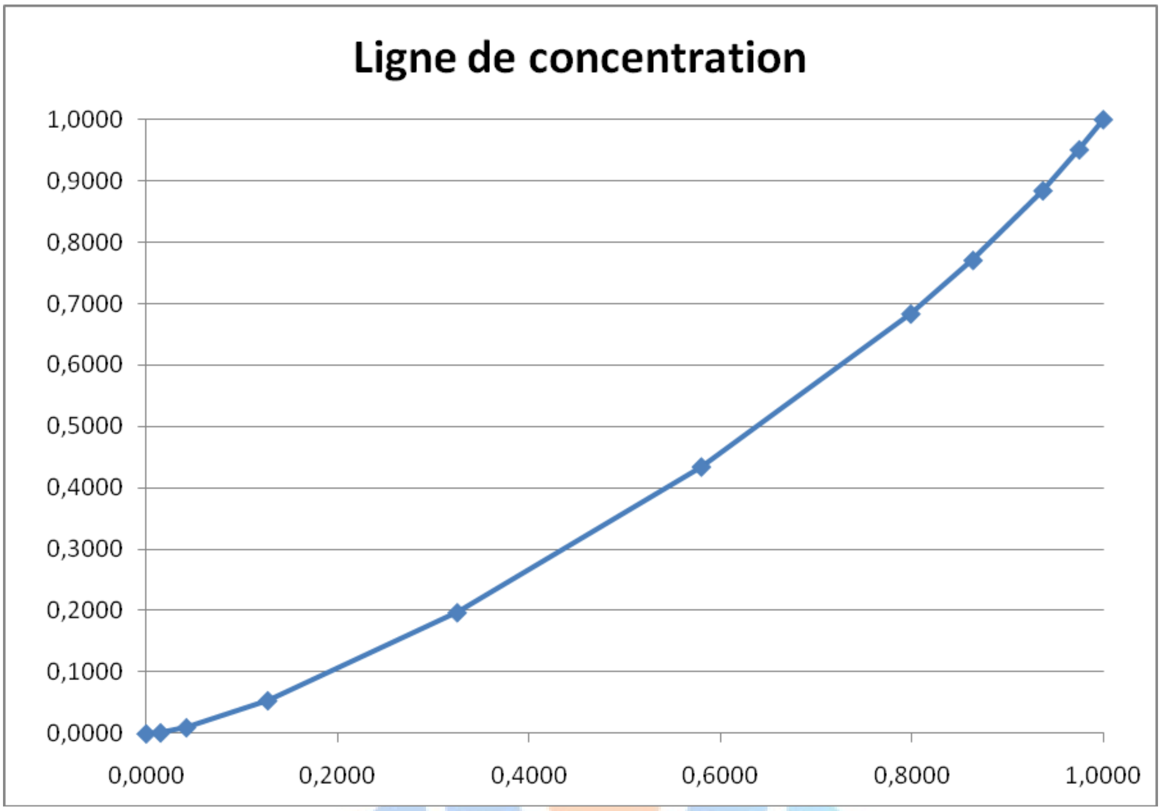
Question 2 :



Question 3 :

J	N_i'	Y_i'
0	0,0000	0,0000
1	0,0150	0,0016
2	0,0420	0,0099
3	0,1270	0,0539
4	0,3250	0,1972
5	0,5800	0,4344
6	0,7990	0,6835
7	0,8640	0,7709
8	0,9370	0,8841
9	0,9750	0,9509
10	1,0000	1,0000

Question 4 :



Question 5 : La courbe que l'on vient de représenter est la courbe de Lorentz. Elle illustre la répartition de la masse salariale dans l'entreprise.

Question 6 : Il s'agit du coefficient de Gini.

Question 7 : Si le coefficient de Gini est nul, cela signifie que la droite OB et la courbe sont confondues. Cela signifie que le salaire est identique pour tout le monde.

Question 8 : Les 20% les plus pauvres de l'entreprise touchent 10% de la masse salariale.
Les 50% les plus pauvres de l'entreprise touchent 35% de la masse salariale.
Les 25% les plus riches de l'entreprise touchent 40% de la masse salariale.

Exercice 2

Question 1 : A partir des données du tableau 4, 2661/2580 = 1,031, soit une évolution de 3,1% entre 2006 et 2007.

Question 2 : Pas de corrigé type.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice n° 1

Question 1

On étudie en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans R. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y' = \frac{y}{4}$,

où y' désigne la dérivée de la fonction y.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c) Déterminer après combien d'années la population dépassera 300 rongeurs.

Question 2

En réalité, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$.

On considère, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice n° 2

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément, au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 euros,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 euros,
- sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien».

Question 1

a) Calculer les probabilités p(V) et p(J) des évènements respectifs V et J.

b) On note $p_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $p_V(R)$ puis $p(R \cap V)$.

c) Calculer p(R).

d) Calculer la probabilité de gagner les 100 euros, puis la probabilité de gagner les 20 euros de la roue.

Question 2

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

d) L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euros. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

Question 3

Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

Question 4

On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes et on suppose $n \geq 1$, calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

Exercice n° 3

Question 1

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$

Question 2

a) Montrer que pour tout n non nul $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Question 3

Calculer u_1 et montrer que $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

Question 4

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$

Question 5

Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

Exercice n° 4

On considère dans cet exercice la matrice ci-dessous et nous allons étudier dans quels cas celle-ci est diagonalisable et dans quels cas elle peut être réduite :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont des éléments de } C^3$$

Question 1

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M.

Question 2

Selon le nombre de racines de l'équation précédente, M sera ou non diagonalisable.

a) Si le polynôme caractéristique admet 3 racines distinctes, justifier que M soit diagonalisable.

b) Si le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes, justifier que M ne soit pas diagonalisable.

c) Si le polynôme caractéristique admet 1 racine triple, justifier que M ne soit pas diagonalisable.

Question 3

Donner les vecteurs propres de M lorsque le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes.

Question 4

Dans le cas de la question 2b, donner une base dans laquelle la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les racines du polynôme caractéristique}$$

Question 5

Dans le cas de la question 2c, donner une base dans laquelle la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \text{ est la racine du polynôme caractéristique}$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

"Le sport est éducation, la plus concrète, la plus véritable : celle du caractère." Que pensez-vous de cette déclaration de René Maheu, ancien Directeur Général de l'UNESCO ?

Sujet n° 2

Les droits de l'homme vous paraissent-ils représenter une exigence valable en tout lieu et pour tout homme, comme l'affirme la *Déclaration*, dite justement *Déclaration Universelle*, des Nations-Unies ?

Sujet n° 3

L'Histoire est le produit le plus dangereux que la chimie de l'intellect ait élaboré. Elle fait rêver, elle enivre les peuples, leur engendre de faux souvenirs, exagère leurs réflexes, entretient leurs vieilles plaies, les tourmente dans leur repos, les conduit au délire des grandeurs ou à celui de la persécution." En vous appuyant sur des exemples précis, vous commenterez et éventuellement discuterez ces lignes de Paul Valery, dans *Regards sur le monde actuel* (1931).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Les stratégies d'intégration des pays émergents dans l'économie mondiale.

Sujet n° 2

I - Exercice de microéconomie (10 points)

A) L'échange (6 points)

Soit le consommateur *A* dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1 \;\; q_2^{1/2}$$

1) Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur *A*.

2) Donnez le taux marginal de substitution de *A* au panier de dotation initiale $Q_A{}^0 = (1, 2)$. Interprétez.

3) Soit un autre consommateur B qui a les mêmes préférences que *A* mais qui possède initialement le panier $Q_B{}^0 = (4, 1)$. Ont-ils intérêt à échanger ? Représentez graphiquement (dans une boîte d'Edgeworth) l'ensemble des échanges possibles ?

4) Représentez graphiquement l'ensemble des équilibres possibles ? Donnez l'équation de la courbe des contrats. Interprétez.

5) Soit un vecteur de prix quelconque (p_1, p_2). Calculez le choix optimal de concurrence parfaite de *A* et *B*. Interprétez.

6) Donnez un vecteur de prix d'équilibre. Quel est le lien avec les équilibres trouvés précédemment ?

B) Le monopole (4 points)

Soit un monopole dont la fonction de coût total est donnée par :

$c(q) = q^3 + 8$ où q est la quantité du bien produit.

La demande du bien qu'elle produit est donnée par :

$d(p) = 16 - p$

1) Quelle(s) hypothèse(s) change dans le modèle du monopole par rapport au modèle de concurrence parfaite ?

2) Tracez et interprétez graphiquement les fonctions de coût marginal et de coût moyen.

3) Quel est le seuil de rentabilité du monopole ? Interprétez.

4) Calculer le choix optimal du monopole, quantité et prix. Interprétez économiquement à quels arbitrages se livre le monopole ?

5) Représentez très succinctement l'aire représentant le profit sur un autre graphique.

6) Comparer son choix avec celui qu'il aurait fait en concurrence parfaite.

7) Ce monopole peut-il être naturel ?

II - Exercice de macroéconomie (4 points)

Soit une économie composée de ménages, d'entreprises et de l'Etat.
La fonction de consommation des ménages est donnée par $C = C_0 + aY_D$, où Y_D représente le revenu disponible des ménages.
Soit I, l'investissement supposé exogène. Soit G les dépenses publiques supposées exogènes.

Soit T, le niveau de l'impôt, supposé exogène.

1) Interprétez la fonction de consommation.

2) Déterminez le revenu d'équilibre de l'économie.

3) Calculez le multiplicateur keynésien.
Supposons désormais que $a = 0{,}5$.

4) Calculez le multiplicateur de dépenses publiques. Quel est l'effet sur le revenu d'une hausse de 100 des dépenses publiques ?

5) Calculez le multiplicateur fiscal. Quel est l'effet sur le revenu d'une baisse d'impôt de 100 ? En comparant votre résultat avec celui de la question précédente, expliquez pourquoi les deux politiques n'ont pas la même efficacité.

6) Sans calcul, expliquez quel serait l'effet d'une hausse de la propension à consommer sur les politiques précédentes. Interprétez. Comment l'Etat pourrait-il alors obtenir un tel effet ?

III - Questions (6 points)

1) La baisse tendancielle du taux de profit chez Marx : enjeux et limites (4 points).

2) L'efficacité marginale du capital (2 points).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Il vous est proposé d'étudier un indicateur lié au problème de la faim dans le monde, il s'agit de la densité de la population sur les terres arables (hab/km^2 arable). Pour cela, il vous est proposé le tableau 1, page 3. Nous allons nous concentrer sur les pays de la zone « Afrique centrale ».

Pour information, une terre arable est une terre qui peut être labourée ou cultivée. Les terres arables comprennent les terres en jachère, les cultures maraichères et céréalières et les prairies artificielles. Les terres arables du globe sont en réduction depuis plusieurs dizaines d'années sous l'effet de plusieurs facteurs : urbanisation des meilleures terres (notamment en Asie), processus de désertification (notamment dans les régions du Sahel et en Australie, mais aussi en Espagne), impact du réchauffement climatique et érosion des terres arables fragiles causée par la déforestation ou l'abus d'engrais.

Question 1

a) A partir du tableau 1, page 3, calculer les indices permettant de suivre les évolutions de population de la zone « Afrique centrale » en base 100 en 2000.

b) Les indices permettant de suivre les évolutions de la densité brute (hab/km^2) seraient-ils les mêmes que ceux calculés à la question précédente ? Justifier.

Question 2

Calculer la moyenne de la densité sur les terres arables (hab/km^2 arable) en 2000 de la zone « Afrique centrale » ainsi que son écart-type.

Question 3

Commenter les chiffres figurant dans le tableau 1, page 3, des deux indicateurs suivants : densité brute et densité sur les terres arables.

Question 4

A partir du tableau 1, page 3, calculer la densité (hab/km^2 arable) en 2000 sur les terres arables de la zone « Afrique centrale ».

Question 5

a) En supposant que la répartition des terres n'a pas bougé entre 1950 et 2000, calculer la densité (hab/km^2 arable) sur les terres arables du Cameroun en 1950.

b) En supposant une diminution de 0,7% par an de la surface des terres arables entre 2000 et 2040, calculer la densité (hab/km^2 arable) sur les terres arables du Cameroun en 2040.

c) Commenter l'évolution de cet indicateur entre 1950 et 2040.

Question 6

Pour l'ensemble de la zone « Afrique centrale », les calculs demandés à la question 5 ont été faits avec les mêmes hypothèses.

Année	1950	2000	2040
Densité terres arables	75	(Cf. réponse à la question 4)	1.222

Comparer la situation du Cameroun au sein de la zone « Afrique centrale ».

Tableau 1 - Superficies et densités en 2000, Evolution de la population de 1950 à 2040

Sous-régions et pays	Histoire		Superficie	Densité (hab/km^2) (2000)		Effectifs de la population (milliers d'habitants)							
	Pays colonisateur	Indépendance en	en (milliers de km^2)	Brute	Terres arables	1950	1970	1990	2000	2005	2010	2020	2040
Afrique centrale			6620	14	-	26316	40610	71053	92960	106241	120960	153827	229816
Angola	Portugal	1975	1248	10	375	4131	5588	9340	12386	14533	16842	22036	35882
Cameroun	France	1960	476	32	211	4466	6631	11661	15117	16564	17775	19874	23499
Centrafrique	France	1960	624	6	184	1314	1871	2943	3715	3962	4265	4900	6038
Congo	France	1960	342	10	1567	808	1323	2494	3447	3921	4532	5960	9159
Congo (RD)	Belgique	1960	2348	21	616	12184	20603	37370	48571	56079	64714	84418	129973
Gabon	France	1960	268	5	254	469	529	953	1258	1375	1509	1781	2284
Guinée Equatoriale	Espagne	1968	28	16	198	226	294	354	456	521	590	736	1040
Sao Tomé-et-Principe	Portugal	1975	1	155	317	60	74	116	149	169	190	232	316
Tchad	France	1960	1285	6	221	2658	3697	5822	7861	9117	10543	13890	21625

Source : Bilan statistique – document « La démographie de l'Afrique au sud du Sahara des années 1950 aux années 2000 » Dominique Tabutin et Bruno Schoumaker

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1) a. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions g définies sur R par : $g(t) = Ce^{\frac{t}{4}}$ où C $\in R$

1) b. $g(0) = 1$ implique que $C = 1$ donc pour tout réel t, on a $g(t) = e^{\frac{t}{4}}$

1) c. L'unité choisie étant la centaine d'individus, la population dépasse 300 rongeurs si et seulement si :$g(t) > 3$ soit $e^{\frac{t}{4}} > 3$ ou encore $\frac{t}{4} >$ ln 3 soit $t > 4 \ln 3 \approx 4{,}3$.

Au bout de 5 ans la population dépassera 300 rongeurs.

2) a. La fonction u est définie sur R^+ et strictement positive, la fonction h définie sur R^+ par $h(t) = \dfrac{1}{u(t)}$, est définie sur R^+ et strictement positive.

La fonction h est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable strictement positive donc non nulle sur R^+ et pour tout réel positif t on a $u(t) = \dfrac{1}{h(t)}$ soit pour tout réel positif t,

$u'(t) = -\dfrac{h'(t)}{h^2(t)}$ donc la relation devient pour tout réel positif t :

$-\dfrac{h'(t)}{h^2(t)} = \dfrac{1}{4h(t)} - \dfrac{1}{12h^2(t)}$ soit :

$$h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \qquad \text{et } h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1$$

2) b. Les solutions sur R de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont les fonctions définies sur R, $t \mapsto \dfrac{1}{3} + Ce^{-\frac{t}{4}}$ où C $\in$ R.

Comme $h(0)=\frac{1}{3}+Ce^{0}=1$ on a $C=\frac{2}{3}$.

Pour tout réel positif t, $h(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}$ et $u(t)=\frac{3}{1+2e^{-\frac{t}{4}}}$

2) c. $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=3$ donc la taille de la population qui sera en augmentation constante tendra vers 300 individus.

Exercice 2

1) a.

- Le nombre de tirages possibles est $C_2^5=10$.
- L'évènement V est réalisé lorsque les deux boules vertes de l'urne sont tirées, il y a donc $C_2^2=1$ seul tirage réalisant V. Les tirages étant tous équiprobables on a :

  p(V) = nombre de tirages réalisant V / nombre total de tirages possibles = $\frac{1}{10}$.
- L'évènement J est réalisé lorsque deux boules jaunes sont tirées, sachant qu'il y a dans l'urne trois boules jaunes, il y a $C_2^3=3$ tirages réalisant J. Les tirages étant équiprobables, on a :

  p(J) = nombre de tirages réalisant J / nombre total de tirages possibles = $\frac{3}{10}$.

1) b. Lorsque le joueur a obtenu deux boules vertes, il fait tourner la roue. La fraction de la roue pour laquelle l'évènement R est réalisé est égale à : $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$. Donc $p_V(R)=\frac{5}{8}$.

On obtient alors : $p(R\cap V)=p(V)*p_V(R)=\frac{1}{10}*\frac{5}{8}=\frac{1}{2*8}$. Donc $p(R\cap V)=\frac{1}{16}$.

1) c. Les évènements V, J, D formant un système complet d'évènements où D est l'évènement « le joueur a obtenu deux boules de couleurs différentes », on utilise la formule des probabilités totales pour calculer p(R) :

$$p(R)=p(V)*p_V(R)+p(J)*p_J(R)+p(D)*p_D(R).$$

D'après le texte $p_J(\text{R}) = 1$ puisque si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation, et $p_D(\text{R}) = 0$ car si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes il a perdu. On obtient donc :

$$p(\text{R}) = \frac{1}{10} * \frac{5}{8} + \frac{3}{10} * 1 = \frac{5}{80} + \frac{3*8}{80} = \frac{29}{80}$$

1) d. La probabilité de l'évènement C : « le joueur gagne 100 E » est :

$p(\text{C}) = p(\text{V} \cap \text{A}) = p(\text{V}) * p_V(\text{A}) = \frac{1}{10} * \frac{1}{8}$, A étant l'évènement « la roue indique un gain de 100 E »

$$p(\text{C}) = \frac{1}{80}$$

La probabilité de l'évènement T "le joueur gagne 20 euros" est :

$p(\text{T}) = p(\text{V} \cap \text{B}) = p(\text{V}) * p_V(\text{B}) = \frac{1}{10} * \frac{1}{4}$, B étant l'évènement « la roue indique un gain de 20 E »

$$p(\text{T}) = \frac{1}{40}$$

2) a. Les valeurs prises par X sont :

- m lorsque le joueur a perdu lors du tirage des deux boules, évènement D ;

0 lorsque l'évènement R est réalisé ;

$20 - m$ lorsque l'évènement T est réalisé ;

$100 - m$ lorsque l'évènement C est réalisé.

2) b. La loi de probabilité de X est d'après ce qui précède :

$$p(X = -m) = p(D) = \frac{3}{5}$$

$$p(X = 0) = p(R) = \frac{29}{80}$$

$$p(X = 20 - m) = p(T) = \frac{1}{40}$$

$$p(X = 100 - m) = p(C) = \frac{1}{80}$$

2) c. Le calcul de l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X

$$E(X)=\frac{3}{5}(-m)+\frac{29}{80}*0+\frac{1}{40}(20-m)+\frac{1}{80}(100-m)$$

$$E(X)=\frac{140-51m}{80}$$

2) d. $E(X)\leq 0$

D'où $m\geq\frac{140}{51}\approx 2{,}74$

La mise minimale en nombre entier d'euros sera de 3 euros.

3) On désigne par F l'évènement « le joueur perd au moins une fois sa mise » et par $\overline{F}$ l'évènement contraire soit : « le joueur ne perd jamais sa mise ».

$$p(\overline{F})=p(D)*p(D)*p(D)*p(D)=\frac{2}{5}*\frac{2}{5}*\frac{2}{5}*\frac{2}{5}$$

La probabilité que le joueur perde au moins une fois sa mise au cours des 4 parties est $p(F)=1-\left(\frac{2}{5}\right)^4=0{,}9744$

4) Calculons la probabilité de l'évènement $\overline{D}$: obtenir deux boules de couleurs différentes. Les tirages de deux boules sont tous équiprobables, le nombre total de tirages possibles est C_2^{n+2} et le nombre de tirages réalisant D est $2n$. D'où :

$$p(D)=\frac{2n}{C_2^{n+2}}=\frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

Si D est réalisé le joueur perd sa mise, si $\overline{D}$ est réalisé le joueur gagne ou est remboursé de sa mise :

$$p(G)=p(\overline{D})=1-\frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

On veut avoir : $p(G)\geq\frac{1}{2}$ donc $n^2-5n+2\geq 0$.

Le trinôme x^2-5x+2 a pour racines $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

Les entiers naturels de N^* solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à $\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ soit les entiers supérieurs ou égaux à 5.

La valeur minimale de n pour que $p(G)$ soit supérieure à 0,5 est $n = 5$

Exercice 3

1) Pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, on a : $0 \le 1-t \le 1$
On en déduit que pour tout entier n, $(1-t)^n \ge 0$ et puisqu'une exponentielle est toujours positive, pour tout entier n et tout réel t appartenant à $[0;1]$, on a $(1-t)^n e^t \ge 0$
$f_n(t) = (1-t)^n e^t$ est continue et positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 f_n(t)dt \ge 0$
Pour tout entier n non nul $u_n \ge 0$

2) a. La fonction exponentielle est croissante sur R donc sur $[0;1]$, donc pour tout t appartenant à $[0;1]$, on a : $e^0 \le e^t \le e^1$ soit $1 \le e^t \le e$
En multipliant les deux membres de l'inégalité $e^t \le e$ par le réel positif $(1-t)^n$, on en déduit : $(1-t)^n e^t \le (1-t)^n e$
En intégrant sur $[0;1]$ les deux membres de l'inégalité précédente, on a :

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \le \int_0^1 et(1-t)^n dt$$

$$\text{Or, } e\int_0^1 (1-t)^n dt = e\,\frac{1}{n+1}$$

d'où le résultat demandé.

2) b. On sait que pour tout entier n non nul $0 \le u_n \le \dfrac{e}{n+1}$

Or, $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$ donc, par encadrement on a : $\lim\limits_{n\to-\infty} u_n = 0$

3) $u_1 = e - 2$ en intégrant par parties.

En posant $u(t) = (1 - t)^{n+1}$ et $v'(t) = e^t$ et en utilisant l'intégration par parties, on trouve le résultat demandé.

4) On considère la propriété P_n « $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ » que l'on démontre par récurrence. D'où le résultat demandé.

5) La limite dépend du signe de a + 2 – e

- Si a = e – 2, la limite est nulle
- Si a > e – 2, la limite est égale à + ∞
- Si a < e – 2, la limite est égale à - ∞

Exercice 4

1) $P(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c$

2)

   a. Si $P(\lambda)$ admet 3 racines distinctes 2 à 2, la matrice est diagonalisable (cf. cours)

   b. Soit λ_1 la racine double et λ_2 la racine simple. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut que l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 soit de dimension 2, ce qui signifie que le rang de la matrice $A = M - \lambda_1 I_d$ soit 1.
   Cela signifie que tous les déterminants d'ordre 2 sont nuls or il apparaît que le déterminant en haut à gauche de A n'est pas nul et vaut 1

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 \\ -c & -b & -a-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

   donc la dimension de l'espace propre à la valeur propre λ_1 est de dimension 1 donc M est non diagonalisable.

   c. Soit λ_1 la racine triple du polynôme caractéristique. Pour la même raison que précédemment, l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 ne peut être 3 donc M est non diagonalisable.

3) On commence par chercher les vecteurs propres associés à λ_1 et à λ_2 (u et v respectivement) qui se calculent via $f(u) = \lambda_1 u$ et $f(v) = \lambda_2 v$ (f étant l'endormorphisme associé à la matrice M)

Donc $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \end{pmatrix}$

4) On cherche une base (u, w, v) dans laquelle la matrice M s'ecrive sous le forme demandée. Dans cette base, le troisième vecteur w est donc tel que f(w) = u + λ_1 w. On trouve alors $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément que (u, w, v) est bien une base.

5) On sait que u et w sont dans la base que l'on cherche et on veut trouver un troisième vecteur w' tel que, dans cette base (u, w, w') : f(w') = v + λ_1 w' (puisque f est l'endormorphisme associé à M). On trouve alors $w' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément que (u, w, w') est bien une base.

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

a)

Années	1950	1970	1990	2000	2005	2010	2020	2040
Population	26.316	40.610	71.053	92.960	106.241	120.960	153.827	229.816
Indices	28,3	43,7	76,4	100	114,3	130,1	165,5	247,2

b) Les indices permettant de suivre les évolutions de la densité brute (hab/km^2) seraient effectivement les mêmes que ceux calculés à la question précédente car la densité brute est égale à la population divisée par la surface totale du pays qui ne bouge pas ici.

Question 2

La densité moyenne sur les terres arables (hab/km^2 arable) de la zone « Afrique centrale » est égale à 438 et son écart-type est égal à 419.

Question 3

On observe que le Congo a la plus forte densité. A l'inverse, la Guinée, la république centrafricaine et le Tchad ont les plus faibles densités. On constate également que là où l'écart entre densité brute et densité des terres arables est fort, plus les difficultés alimentaires peuvent surgir.

Question 4

Il faut commencer par calculer une estimation de la surface des terres arables pour l'ensemble de la zone. Ceci s'obtient en sommant la surface de ces terres pays par pays. La surface des terres arables de l'Angola par exemple, s'obtient en résolvant l'équation

Densité = Population / Surface……. 375 = 12.386 / X d'où X = 33 milliers de km^2

Pays	Surface des terres arables (en milliers de km^2)
Angola	33
Cameroun	72
Centrafrique	20
Congo	2
Congo (RD)	79
Gabon	5
Guinée Equatoriale	2
Sao Tomé et Principe	Non significatif
Tchad	36
Total	249

La population totale de la zone « Afrique centrale » en 2000 étant de 92.960 milliers d'habitants, la densité demandée est de 92.960/249 = 373

Question 5

a) $4466/72^{*} = 62$ (* calculé à la question précédente)

b) La surface des terres arables passerait de 72 milliers de km^2 à :

$$72 \times (1-0{,}007)^{40} = 54 \text{ milliers de } km^2$$

La densité serait alors en 2040 de 23.499/54 = 435

c) L'indicateur passe de 62 en 1950 à 435 en 2040. Cela signifie qu'il faut faire « vivre » presque 10 fois plus de monde sur la même surface de culture. Et encore, la donnée de 1950 est sous estimée puisque l'on a fait l'hypothèse d'une surface identique à celle de 2000 alors que vraisemblablement, il y avait une surface supérieure à 72 milliers de km^2 en 1950.

Question 6

Pour l'ensemble de la zone « Afrique centrale », la densité des terres arables passe de 75 à $1.222 = 229.816/(249 \times 0{,}993^{40})$, soit 16 fois plus. Le Cameroun est donc dans une situation un peu meilleure.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice 1

Un enfant joue avec 20 billes, 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boite cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boite cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément 3 billes au hasard dans la boite cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boites (probabilité identique de tirer l'une ou l'autre des deux boites), puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boite choisie.

On considère les évènements suivants :

$A1$: « l'enfant choisit la boite cubique »
$A2$: « l'enfant choisit la boite cylindrique »
R : « l'enfant prend une bille rouge »
V : « l'enfant prend une bille verte »

a. Calculer la probabilité de l'évènement *R*.

b. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boite cubique ?

3. L'enfant reproduit *n* fois de suite son deuxième jeu (tirage d'une bille), en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de *n*, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses *n* choix.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$.

<u>Exercice 2</u>

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Etudier la fonction *f* et tracer sa courbe représentative.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel *n*, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.

On note α_n cette solution. On a donc pour tout entier naturel *n* : $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. Préciser la valeur de α_1.

c. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

b. Etudier la fonction *h* définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = \ln x - x + 1$.

c. En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

4. Démontrer que pour tout entier naturel *n* non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et telle que :
$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1. Soit la suite (u_n), définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$.

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$: montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*, puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au $n^{ième}$ lancer ».

Par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de $A_{n'}$.
Par R_n l'évènement « on obtient rouge au $n^{ième}$ lancer ».
Par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de $R_{n'}$.
Par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.

b. Déterminer r_1.

c. En remarquant que, pour tout $n \geq 1, R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$, montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

d. Montrer que, pour tout $n \geq 1, A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A}_n \cap \overline{R_n})$.

e. En déduire que pour tout $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de *n*.

f. En déduire l'expression de r_n en fonction de *n*, puis la limite de r_n quand *n* tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Etudier la série de terme général $u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$, avec *a* un nombre réel compris entre 0 et 1 inclus (indication : démontrer que l'on peut se ramener à l'étude d'une série à termes positifs et effectuer un développement limité de u_n à l'ordre 2)

Exercice 5

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle projecteur de E tout endomorphisme *p* de E vérifiant $p^2 = p \circ p = p$. Démontrer que *p* est diagonalisable.

2. Soit *u*, *v* et *f* trois endomorphismes de E tels qu'il existe (λ, μ) appartenant à R^2 (où R désigne l'ensemble des nombres réels) avec :

$$f = \lambda u + \mu v,\ f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v,\ f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$$

a. Démontrer que $f^3 - (\lambda + \mu) f^2 + \lambda\mu f = 0$

b. *f* est-elle diagonalisable ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Forces et faiblesses de la société démocratique (dite aussi "société ouverte").

Sujet n° 2

"Pas de liberté pour les ennemis de la liberté" déclarait le dirigeant politique Saint-Just pendant la Révolution Française, à l'époque de la Terreur. Que pensez-vous de cette formule ?

Sujet n° 3

La mondialisation vous paraît-elle un bien ou un mal pour l'Afrique ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Mobilisez vos connaissances théoriques pour expliquer les enjeux de la « crise » actuelle des dettes publiques européennes.

Sujet n° 2

I - Exercice de microéconomie (8 points)

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/4}\ q_2^{1/2}$$

Soit p, le prix de l'output, et p_1, p_2 les prix respectifs des deux inputs.

1) Quel est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez.

2) Quelle propriété importante doivent vérifier les productivités marginales en concurrence parfaite ? Est-ce le cas ?

3) Après avoir rappelé sa définition, calculez son taux marginal de substitution technique.

4) Après avoir rappelé sa définition, tracez l'isoquante passant par le panier (8, 4). Quelles sont ses propriétés ?

5) Donnez les conditions de maximisation du profit, en fonction de q_1, q_2. Interprétez.

6) Calculez les demandes optimales d'inputs pour des prix quelconques.

7) Donnez sa fonction d'offre concurrentielle pour $p_1 = p_2 = 1$. Interprétez.

8) Donner la fonction de coût (en fonction de la quantité d'output), toujours pour $p_1 = p_2 = 1$. En déduire à nouveau la fonction d'offre concurrentielle.

II - Exercice de macroéconomie (6 points)

On se place dans le cadre d'un modèle dit « keynésien » (prix fixes et excès d'offre sur le marché des biens et du travail) en économie ouverte en supposant une situation de taux de change fixe. Ce modèle caractérise l'économie d'un « petit pays » par les trois relations d'équilibre suivantes :

[1] $Y = c\,(Y - T) - \gamma i + i_0 + G + Z(x, Y)$

où Y représente le revenu, i le taux d'intérêt, G les dépenses publiques, T les prélèvements obligatoires et où c et γ sont deux paramètres : $0 < c < 1$ et $\gamma > 0$;
où Z représente le solde de la balance commerciale (mesuré en monnaie nationale), fonction du revenu Y et du taux de change réel x (avec $x = \frac{eP^*}{P}$, où e représente le taux de change nominal coté à l'incertain, P^*, le prix des biens étrangers en monnaie étrangère), soit :
$Z\,(x, Y) = ax - bY$, a et b étant deux paramètres strictement positifs.

[2] $\frac{\overline{M}}{P} + \lambda R = \alpha Y - \mu i$

où $\overline{M}$ est l'offre de monnaie domestique, P le prix des biens domestiques et R les réserves de devises exprimées en prix domestiques ;
où λ, α et μ sont des paramètres : $0 \leq \lambda \leq 1$, $\alpha > 0$ et $\mu > 0$.

[3] $\Delta R = Z(x, Y) + H$

où ΔR est la variation des réserves de devises et H le solde de la balance des capitaux supposé dépendre de l'écart entre le taux d'intérêt national (i) et le taux d'intérêt « mondial » (i^*) :
$H = h\,(i - i^*)$ où h est un paramètre positif ou nul.

1) Commentez les différentes relations d'équilibre (en précisant ce qu'elles représentent et les hypothèses théoriques sur lesquelles elles s'appuient). (2 points)

2) On fait l'hypothèse d'absence de politique de stérilisation de la variation de la position monétaire extérieure. Commentez brièvement cette hypothèse et précisez quel paramètre du modèle s'en trouve affecté. (1 point)

3) Quel est l'impact d'une augmentation du taux de change réel sur le solde de la balance commerciale (explicitez votre réponse) ? (1 point)

4) Quels est l'impact d'une politique budgétaire expansionniste dans une situation où les capitaux sont supposé totalement immobiles ? Vous étayerez votre réponse sur une analyse graphique. (2 points)

III - Questions (6 points)

1) Innovation et destruction créatrice chez J. Schumpeter (3 points).

2) Le travail commandé chez A. Smith (3 points).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.

Le sujet porte sur l'examen d'une partie des comptes nationaux du Maroc entre 1980 et 2008. Les tableaux sont extraits du document établi par le Haut-Commissariat au Plan de ce pays en avril 2010. Le Produit Intérieur Brut (PIB) étant utilisé pour des notions parfois différentes en comptabilité nationale, il est précisé ici que celui qui servira de référence dans les calculs demandés correspond à la ligne « Produit intérieur brut » des tableaux 1 et 2. Il n'y a donc aucun calcul à envisager pour repérer les montants du PIB.

A partir du tableau 1 joint en annexe (*Ressources et emplois de biens et services à prix courants base 1998*), il vous est demandé de :

Question 1

Calculer l'évolution annuelle moyenne[1] entre 1980 et 2008 des trois grands indicateurs de la santé économique d'un pays :

a) Le Produit Intérieur Brut (PIB)
b) Les importations
c) Les exportations
d) Commenter ces évolutions

Question 2

a) Calculer la part des importations et des exportations dans le PIB en 1980 et en 2008
b) Commenter

[1] Il s'agit d'une moyenne géométrique

Question 3

a) Calculer l'évolution annuelle moyenne[1] du PIB sur chacune des périodes suivantes : 1980-1985, 1985-1990, 1990-1995, 1995-2000, 2000-2005, 2005-2008

b) Commenter

Question 4

a) Calculer le solde commercial qui est la différence entre les exportations et les importations en 1980, 1990, 2000, 2005 et 2008

b) Calculer la part du déficit commercial dans le PIB pour les mêmes années

c) Commenter

Question 5

a) L'investissement est représenté par la Formation brute de Capital Fixe, calculer sa part dans le PIB pour les années 1980, 1990, 2000 et 2008

b) Commenter

Question 6

a) A partir du tableau 2 joint en annexe (*Ressources et emplois de biens et services en volume prix chaînés base 1998*), calculer l'évolution annuelle moyenne[1] du PIB en volume sur chacune des périodes suivantes : 1980-1985, 1985-1990, 1990-1995, 1995-2000, 2000-2005, 2005-2008

b) Commenter en mettant en regard les données de la question 6a avec celles de la question 3a

Question 7

Estimer le taux d'inflation entre 2007 et 2008

[1] Il s'agit d'une moyenne géométrique

Tableau 1

COMPTES NATIONAUX 1980-2008

3.1 - Décomposition du produit intérieur brut

3.1.1 - Ressources et emplois de biens et services à prix courants : base 1998

En millions dhs

Opérations	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Ressources														
Produit intérieur brut	82 981	88 490	102 943	111 242	124 854	143 843	170 459	172 676	202 223	214 510	237 704	270 029	273 576	280 245
Importations de biens et services	23 393	31 230	35 200	33 858	44 592	50 139	49 022	48 336	52 036	60 996	74 120	76 324	80 034	80 148
Total	**106 374**	**119 719**	**138 143**	**145 100**	**169 447**	**193 982**	**219 482**	**221 012**	**254 260**	**275 506**	**311 824**	**346 353**	**353 610**	**360 393**
Emplois														
Dépenses de consommation finale des ménages	51 310	55 612	63 928	70 822	78 898	89 242	106 647	106 859	119 534	130 463	142 623	170 389	171 674	174 460
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	14 918	16 841	19 220	20 200	21 736	26 140	30 806	33 040	36 566	38 167	40 006	44 175	47 543	51 329
Formation brute de capital fixe	21 071	26 228	30 306	28 940	30 207	34 832	38 397	36 815	43 336	51 413	59 426	64 509	65 192	68 504
Variation de stocks	2 597	284	1 831	-974	5 343	5 552	5 092	3 641	2 451	5 513	8 695	4 609	5 445	1 627
Exportations de biens et services	16 479	20 755	22 857	26 113	33 262	38 216	38 541	40 656	52 374	49 950	61 075	62 670	63 757	64 474
Total	**106 374**	**119 719**	**138 143**	**145 100**	**169 447**	**193 982**	**219 483**	**221 012**	**254 260**	**275 506**	**311 825**	**346 353**	**353 611**	**360 393**

Opérations	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Ressources															
Produit intérieur brut	313 687	317 550	360 698	355 011	384 385	389 569	393 381	426 402	445 426	477 021	505 015	527 679	577 344	616 254	688 843
Importations de biens et services	85 191	95 432	93 453	100 027	108 033	115 467	131 198	136 202	143 696	150 229	173 342	200 071	229 084	276 477	346 119
Total	**398 878**	**412 982**	**454 151**	**455 038**	**492 418**	**505 036**	**524 579**	**562 604**	**589 122**	**627 250**	**678 357**	**727 750**	**806 428**	**892 731**	**1 034 962**
Emplois															
Dépenses de consommation finale des ménages	200 371	200 844	228 511	218 817	234 359	235 814	241 716	246 292	257 990	273 562	288 602	303 172	331 996	360 008	413 592
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	54 628	60 552	61 943	63 457	64 290	70 051	72 346	79 414	81 339	86 470	94 321	102 110	107 071	112 234	118 336
Formation brute de capital fixe	70 399	72 989	74 734	78 173	89 905	97 840	102 202	105 937	112 320	119 802	132 719	145 256	162 456	192 573	227 902
Variation de stocks	4 974	3 136	6 918	5 500	10 029	-1 214	-1 762	5 550	3 170	10 679	14 390	6 699	7 446	7 614	22 328
Exportations de biens et services	68 506	75 461	82 047	89 090	93 835	102 545	110 077	125 411	134 303	136 737	148 325	170 513	197 459	220 302	252 804
Total	**398 879**	**412 983**	**454 152**	**455 037**	**492 418**	**505 036**	**524 579**	**562 604**	**589 122**	**627 250**	**678 357**	**727 750**	**806 428**	**892 731**	**1 034 962**

Tableau 2

3.1.4 - Ressources et emplois de biens et services en volume (prix chaînés, base 1998)

En millions dhs

Opérations	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Ressources														
Produit intérieur brut	188 879	185 807	204 710	206 317	219 252	231 026	253 301	250 092	280 578	288 536	296 583	318 965	309 691	306 585
Importations de biens et services	51 801	55 512	56 285	53 279	57 446	59 147	57 866	62 916	65 561	70 915	77 523	81 295	89 480	84 720
Total	**241 093**	**241 831**	**260 896**	**258 871**	**276 038**	**289 112**	**308 164**	**311 139**	**343 631**	**357 126**	**372 249**	**397 969**	**397 778**	**389 902**
Emplois														
Dépenses de consommation finale des ménages	113 610	113 770	122 896	127 172	134 069	138 632	155 069	153 936	167 877	174 556	176 542	199 434	194 270	190 384
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	34 801	36 677	39 341	39 364	40 325	44 567	48 849	51 427	55 521	55 485	53 929	56 448	58 189	59 593
Formation brute de capital fixe	53 361	55 321	57 574	52 833	49 247	54 859	54 088	54 143	59 580	67 742	69 814	71 792	71 433	69 495
Variation de stocks	6 831	498	2 521	-1 342	6 657	5 536	5 916	3 529	2 062	4 051	4 839	3 776	3 987	1 757
Exportations de biens et services	33 797	36 019	38 679	42 056	44 388	45 071	44 834	48 657	58 936	55 506	65 070	66 572	69 703	69 813

Opérations	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Ressources															
Produit intérieur brut	341 824	320 192	363 289	355 980	384 385	386 420	392 574	422 221	436 222	463 778	486 048	500 525	539 365	553 959	584 890
Importations de biens et services	84 237	96 902	91 303	100 027	108 033	115 673	124 474	126 173	134 297	143 805	157 985	173 206	187 337	215 488	239 033
Total	**424 256**	**416 765**	**454 333**	**456 007**	**492 418**	**502 093**	**516 995**	**548 038**	**570 355**	**607 445**	**643 974**	**674 107**	**727 155**	**772 283**	**828 182**
Emplois															
Dépenses de consommation finale des ménages	216 939	201 345	229 520	219 027	234 359	233 378	236 702	242 232	250 917	269 340	282 414	288 910	308 785	320 381	350 605
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	61 474	62 084	63 034	63 653	64 290	68 450	69 278	72 521	72 942	74 536	77 778	80 530	82 834	86 402	90 590
Formation brute de capital fixe	67 782	73 882	74 420	79 366	89 905	98 472	101 200	102 045	109 528	117 990	127 892	137 369	150 652	172 195	192 357
Variation de stocks	3 513	2 269	4 456	5 128	10 029	-1 341	-2 119	6 517	5 063	17 918	21 353	9 802	9 264	8 629	14 323
Exportations de biens et services	76 161	78 655	83 492	89 090	93 835	103 134	111 961	126 637	133 796	134 656	143 104	162 126	180 966	190 357	188 319

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. a. L'enfant peut obtenir 0, 1, 2 ou 3 boules rouges. Le nombre de cas possibles pour tirer 3 boules rouges est $C_3^{13} = 286$

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_3^{13}} = \frac{1}{286}$$
$$P(X=1) = \frac{C_2^3 C_1^{10}}{C_3^{13}} = \frac{30}{286}$$
$$P(X=2) = \frac{C_1^3 C_2^{10}}{C_3^{13}} = \frac{135}{286}$$
$$P(X=3) = \frac{C_3^{10}}{C_3^{13}} = \frac{120}{286}$$

1. b. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \dfrac{30}{13}$

2. a.

$$P(R) = P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2)$$
$$P(R) = P(A_1) \times P_{A_1}(R) + P(A_2) \times P_{A_2}(R)$$
$$P(R) = \frac{109}{182}$$

2. b. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle $P_R(A_1) = \dfrac{P(R \cap A_1)}{p(R)} = \dfrac{70}{109}$

3.a. Il faut s'intéresser à l'événement contraire « ne jamais prendre de bille rouge » au cours de n tirages, dont la probabilité est $\left(1 - \dfrac{109}{182}\right)^n = \left(\dfrac{73}{182}\right)^n$

Donc $p_n = 1 - \left(\dfrac{73}{182}\right)^n$

3. b. En résolvant, on aboutit à n doit être supérieur ou égal à ln(0,01) divisé par ln(73/182), ce qui donne n supérieur ou égal à 5,04.

La plus petite valeur pour laquelle p_n est supérieure à 99% est donc $n = 6$.

Excercice 2

Partie A

1. On montre que la limite de f en 0 est $-\infty$ et que celle en $+\infty$ est $+\infty$. En calculant la dérivée de f, on montre que f est strictement croissante sur son intervalle de définition. Le graphe n'est pas reproduit ici (il admet une branche parabolique dans la direction $y = x$).

2. a. la fonction f est continue, strictement croissante sur son intervalle de définition, donc $f(x) = n$ n'admet qu'une seule solution (théorème de cours)

2. b. $\alpha_1 = 1$

2. c. Par définition $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$, comme n est plus petit que n+1, on a $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$

la fonction f étant strictement croissante, on en déduit que la suite α_n est strictement croissante

3. a. Une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A est :

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) = 2x-1$$

3. b. En étudiant la fonction h en calculant ses limites et sa dérivée, on observe que h est croissante sur l'intervalle 0,1 et décroissante entre 1 et l'infini. Et $h(1) = 0$.

3. c. La position est déterminée par le signe de $f(x)$ - $(2x-1)$ qui est égal à $h(x)$. Or, $h(x)$ est toujours négative (cf. question précédente), donc Γ est au dessous de Δ.

4. En utilisant le fait que la fonction h est négative et la définition de α_n, on a le résultat attendu. On en déduit que la limite de α_n est + l'infini.

Partie B

1. Une suite est majorée s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite. Une suite n'est pas majorée si, pour tout réel M, il existe au moins un terme de la suite qui est strictement supérieur à M.

On considère une suite (u_n) croissante et non majorée. On veut montrer que, pour tout réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

Puisque (u_n) n'est pas majorée, pour tout réel A, il existe au moins un terme de la suite qui est strictement supérieur à A. On note n_0 le rang de ce terme et on a $u_{n_0} > A$. La suite est croissante, donc, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} > A$

A partir du rang n_0, tous les termes de la suite sont donc supérieurs à A. Cette propriété étant vraie pour tout réel A, la suite (u_n) tend donc vers + l'infini.

2. On raisonne par l'absurde pour montrer que la suite (β_n)n'est pas majorée. On la suppose donc majorée. Cette suite étant majorée et croissante, elle converge vers une limite *m*. La fonction *g* étant continue, la suite $(g(\beta_n))$ converge vers $g(m)$.

Or, on a par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} g(\beta_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc la suite$(g(\beta_n))$ne converge pas. Cela signifie que l'hypothèse selon laquelle la suite (β_n) est majorée est fausse.

La suite (β_n) n'est pas majorée, elle est croissante. D'après la question précédente, elle converge donc vers + l'infini.

Exercice 3

1. a. On montre facilement que $v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$

1. b. Comme la suite v_n est une suite géométrique, on a $v_n = v_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ avec $v_1 = 1/10$, on en déduit que : $u_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2. a. On trouve $a_1 = 1/2$

2. b. En construisant un arbre des possibilités, on trouve $r_1 = 7/12$

2. c. En utilisant la remarque qui est évidente compte tenu que l'événement R_n peut se produire avec le dé A ou le dé B, et en notant que les évènements $(R_n \cap A_n)$ et $(R_n \cap \overline{A_n})$ sont incompatibles, on a :

$$r_n = P(R_n) = P(R_n \cap A_n) + P(R_n \cap \overline{A_n}) = a_n \frac{1}{2} + (1 - a_n)\frac{2}{3} = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$$

2. d.Le dé A est utilisé à la n+1 ème partie dans deux cas :

- si on l'a utilisé à la $n^{\text{ème}}$ partie et que l'on a obtenu rouge (événement $(A_n \cap R_n)$);
- si on a utilisé le dé B à la $n^{\text{ème}}$ partie et que l'on a obtenu blanc (événement $(\overline{A}_n \cap \overline{R_n})$).

2. e. En procédant de la même façon qu'à la question 2c, on montre que $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$.

Il s'agit de la même suite que la suite traitée à la question 1, donc $a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2. f. En utilisant les questions 2c et 2e, on obtient $r_n = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$ qui a pour limite 3/5

Exercice 4

u_n peut s'écrire $u_n = \frac{(1-a)n+1}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}}$, ce qui montre qu'à partir d'un certain rang, on obtient une série à termes positifs.

En effectuant un développement limité, on a $u_n = \frac{1-a}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

En utilisant la règle de Riemann, la série diverge si *a* est différent de 1 et converge dans le cas *a* = 1.

Exercice 5

1. On recherche les valeurs propres de *p* qui sont 0 et 1 en utilisant le fait $p^2 = p$. Le sous espace vectoriel engendré par la valeur propre 0 est Ker *p* et le sous espace vectoriel engendré par la valeur propre 1 est Im *p*. Comme Ker *p* et Im *p* sont des espaces supplémentaires (on trouvera une démonstration dans les annales du concours ITS voie B Option Economie de l'année 2003), *p* est diagonalisable.

2. a. évident

2. b. On déduit de la question 2a que $f(f-\lambda Id)(f-\mu Id) = 0$, Id étant la fonction identité. Donc, les valeurs propres sont $0, \lambda, \mu$

- Si $0 = \lambda = \mu$, *f* est la fonction nulle ;
- Si $0 \neq \lambda \neq \mu$, *f* est diagonalisable ;
- Si $\lambda = 0, \mu \neq 0$, on a $v^2=v$ donc *v* est un projecteur donc *f* est diagonalisable ;
- Si $\lambda \neq 0, \mu = 0$, on a $u^2=u$ donc *u* est un projecteur donc *f* est diagonalisable ;
- Si $\lambda = \mu \neq 0$, on a $(u+v)^2=u+v$ donc $u+v$ est un projecteur donc *f* est diagonalisable.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

1. a. $\left(\frac{688843}{82981}\right)^{1/28} = 1{,}0785$ soit 7,85% par an de croissance

1. b. $\left(\frac{346119}{23393}\right)^{1/28} = 1{,}1010$ soit 10,10% par an de croissance

1. c. $\left(\frac{252804}{16479}\right)^{1/28} = 1{,}1024$ soit 10,24% par an de croissance

1. d. Les taux de croissance du commerce extérieur (exportations et importations) vont plus vite que la croissance du PIB. Les exportations ont une progression plus forte que les importations.

2. a.

Part dans le PIB des	1980	2008
Importations	28,2%	50,2%
Exportations	19,9%	36,7%

2. b. Le solde du commerce extérieur est négatif. La montée en puissance des échanges extérieurs au cours de la période étudiée est évidente : les importations représentant plus de la moitié du PIB.

3. a. Taux de croissance annuel moyen du PIB par période :

Période 1980/1985 : 11,63%
Période 1985/1990 : 10,57%
Période 1990/1995 : 5,96%
Période 1995/2000 : 4,38%
Période 2000/2005 : 6,05%
Période 2005/2008 : 9,29%

3. b. On observe un ralentissement économique sur la décennie 1990/2000 et une reprise forte de la croissance les 3 dernières années étudiées.

4.

Année	Solde commercial	Part dans le PIB
1980	- 6914	8,3%
1990	- 13045	5,4%
2000	- 21121	5,4%
2005	- 29558	5,6%
2008	- 93315	13,5%

Le déficit est constant mais sa part dans le PIB a longtemps été autour de 5 et 6% alors qu'il a beaucoup progressé en 2008.

5. a.

Année	Part dans le PIB
1980	25,4%
1990	25,0%
2000	26,0%
2008	33,1%

5. b. La part de l'investissement est assez stable au fil du temps.

6. a.

Période	Croissance moyenne annuelle en volume du PIB
1980/1985	4,11%
1985/1990	5,12%
1990/1995	1,54%
1995/2000	4,16%
2000/2005	4,98%
2005/2008	5,33%

6. b. A l'exception de la période 1990/1995, le Maroc est sur une croissance en volume voisine de 5% l'an. Au sujet de cette période 1990/1995, on observait une croissance moyenne annuelle du PIB de 5,96% l'an (question 3) alors qu'en volume, la croissance n'est que 1,54%. L'effet « prix » était donc bien plus fort que l'effet « volume ». D'ailleurs, on peut constater que l'inflation a été forte jusqu'aux années 1995. Elle a été presque complètement maitrisée jusqu'aux années 2005 puisque les taux en volume sont proches des taux de croissance du PIB. Mais l'inflation repart depuis 2005.

7. En prix courants, le PIB a cru de 11,78% entre 2007 et 2008 (688843/616254-1). En prix constants, il a cru de 5,58% (584890/553959-1).

L'inflation se calcule avec la formule 1,1178 = 1,0558 (1 + inflation) soit une inflation de 5,87%.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice 1 (4 points)

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels chacune des équations suivantes, où *ln* désigne le logarithme népérien :

1) $\ln(x+4) = \ln(6-2x)$
2) $\ln(3x+5) + \ln(x-2) = \ln 3$
3) $(\ln x)^2 - 4\ln x \geq 5$
4) $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

Exercice 2 (4 points)

Dans une population, il y a 50% d'hommes et 50% de femmes. On suppose que la population est suffisamment importante pour que le fait d'enlever quelques individus ne modifie pas sa structure. On choisit au hasard un échantillon de 10 personnes.

1) Donner la probabilité des événements suivants :

   A = « Il y a exactement 8 femmes parmi les 10 personnes »
   B = « Il y a au moins 8 femmes parmi les 10 personnes »

2) Donner le nombre n minimum de personnes qu'il faut dans l'échantillon pour que la probabilité qu'il y ait au moins un homme parmi les n personnes soit supérieure à 0,999

Exercice 3 (8 points)

Partie A - Construction d'une suite de nombre réels convergeant vers $\sqrt{2}$

1) Vérifier que $\sqrt{2}-1$ est solution de l'équation $x=\frac{1}{2+x}$
2) Représenter graphiquement la fonction *f* définie sur [0,1] par $f(x)=\frac{1}{2+x}$

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2+u_n} \end{cases}$

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$

4) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)}\left|u_n-(\sqrt{2}-1)\right|$$

5) En déduire que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n-(\sqrt{2}-1)\right|$ puis que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4^n}$

6) Quelle est la limite de la suite (u_n+1) ?

Partie B - Propriétés de la suite (u_n)

1) Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n
2) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel
3) Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante
4) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n=\frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux (Rappel : deux nombres *p* et *q* sont premiers entre eux s'il existe deux nombres entiers *c* et *d* tels que $cp+dq=1$). Sachant que $p_0=0$ et $q_0=1$:

   a) Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors b et a+2b sont aussi premiers entre eux. Cela revient à montrer qu'il existe deux nombres entiers *u'* et *v'* tels que (a+2b)*u'*+b*v'*=1 sachant qu'il existe deux nombres entiers *u* et *v* tels que a*u*+b*v*=1

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=q_n$ et $q_{n+1}=2q_n+p_n$

   c) Calculer q_n en fonction de n

Exercice 4 (4 points)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

1) Montrer que *f* admet une fonction réciproque sur R
2) Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Selon plusieurs études parues récemment (provenant notamment de l'Institut pour la finance internationale et du cabinet de conseil McKinsey), la croissance en Afrique repose sur de solides bases, et le secteur de la consommation et des services devrait voir son chiffre d'affaires exploser dans les années à venir.

Vous apporterez un point de vue critique à cette affirmation.

Sujet n° 2

« L'économie africaine, pour l'essentiel, repose sur les femmes » indiquait Alpha Condé, le président de la Guinée, lors d'un entretien au journal Le Monde en janvier 2012. Développez cette affirmation et prolongez votre exposé sur le rôle des femmes africaines dans d'autres domaines.

Sujet n° 3

La célèbre formule d'Abraham Lincoln (16ème président des Etats Unis de 1860 à 1865) « la démocratie est le gouvernement du peuple, par le peuple, pour le peuple » est-elle une définition encore possible est réalisable ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment lutter contre le chômage dans un contexte de mondialisation ?

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

I - L'offre de travail (6 points)

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(l, q) = l^{2/3}\ q^{2/3}$$

où l désigne la quantité de loisir et q la quantité de bien consommé.
Le temps disponible de ce consommateur est de 24h, soit $T = 24$.
Soient s le salaire et p le prix du bien de consommation.

1) Donnez l'équation de la contrainte budgétaire. Tracez cette contrainte ainsi que le vecteur de prix et interprétez.

2) Donnez le taux marginal de substitution du consommateur et interprétez.

3) Calculez son choix optimal de concurrence parfaite et représentez le graphiquement sur le schéma précédent. Décrivez de manière littéraire l'arbitrage auquel se livre le consommateur. Donnez son offre de travail optimale. Interprétez.

4) Supposons désormais que le salaire s baisse, p restant constant. Décrivez – sans calcul – l'effet de ce changement sur le choix optimal du consommateur (vous décomposerez notamment cet effet en effet revenu et effet substitution). Que peut-on dire de la forme de sa fonction d'offre de travail ?

5) Supposons désormais que ce consommateur dispose d'une dotation de survie notée q_0. Tracez, sur un nouveau schéma, son ensemble de consommations possibles. Qu'est-ce alors que le salaire de réserve ?

6) Quelle hypothèse implicite fait-on quand on suppose que l'offre de travail est une fonction croissante du salaire réel ? Quelle représentation du fonctionnement du marché du travail soutient cette théorie ?

II - Le producteur (4 points)

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(k, l) = k^{1/3}\ l^{2/3}$$

Notons p, le prix de l'output et p_1, s les prix respectifs des deux inputs k et l.

1) Quelle est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez. Est-ce conforme aux hypothèses usuelles ?

2) Après avoir rappelé sa définition, calculez et interprétez le taux marginal de substitution technique.

3) Calculez alors ses demandes optimales d'inputs en fonction des prix. Comment interpréter un tel résultat ? Que peut-on en déduire quand à l'offre d'output de ce producteur ?

MACROECONOMIE (4 points)

Une entreprise doit choisir d'investir $I_0 = 100$ en biens d'équipement et dispose pour cela de fonds propres. Le taux d'intérêt noté r est à 5%.

Le rendement de cet investissement sur deux ans est de 150 la première année et de 100 la seconde année. L'investissement ne peut être revendu ultérieurement.

1) Après avoir rappelé sa définition, donnez la valeur actuelle nette de l'investissement. L'entreprise choisit-elle d'investir ? Comment réagit alors l'investissement à une variation du taux d'intérêt ? Quelle relation en déduire entre taux d'intérêt et investissement ?

2) Après avoir rappelé sa définition, donnez le taux de rendement interne de l'investissement. Interprétez. Quels sont alors les déterminants de l'investissement ?

3) Que se passe-t-il si l'entreprise ne dispose pas de fonds propres mais doit emprunter pour réaliser cet investissement ?

4) Quel est le lien entre le taux de rendement interne et l'efficacité marginale du capital chez Keynes. Pourquoi celle-ci est instable et «psychologique» selon Keynes ?

QUESTIONS (6 points)

I) Rappelez la définition d'un bien collectif. Quels enjeux soulève cette notion en termes de politique publique ?

II) Qu'est-ce que la loi de J. B. Say ? Quels sont les enjeux d'une telle loi ?

III) Qu'est-ce que l'effet de cliquet dans la consommation ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires donnés après chaque résultat.

Le Produit Intérieur Brut (*PIB*) est une mesure de l'activité économique, mais il est souvent utilisé pour comparer les pays en terme de développement et de niveau de richesse. Cependant il ne prend pas en compte des dimensions non économiques (éducation, santé, …), pourtant importantes en terme de progrès et de bien-être. Au début des années 1990, la Banque Mondiale a proposé un Indicateur de Développement Humain (*IDH*) qui tient compte non seulement du développement économique (mesuré par le *PIB*) mais également de l'espérance de vie (vie) et de l'accès à l'éducation $(éducation)$.

Cet indicateur est la moyenne arithmétique des indices utilisés pour mesurer les niveaux atteints dans chaque dimension, soit : $IDH = \frac{1}{3} I_{PIB} + \frac{1}{3} I_{vie} + \frac{1}{3} I_{éducation}$

Question 1 – Indices dimensionnels

Sur chaque dimension, des valeurs minimales et maximales sont définies afin d'obtenir des indices compris entre 0 et 1. Les valeurs maximales sont les valeurs les plus élevées observées au cours de la période considérée (1980-2011). Les valeurs minimales sont celles que l'on est en droit de considérer comme des valeurs de subsistance. Il a été défini les valeurs minimales suivantes : 20 ans pour l'espérance de vie, zéro pour les deux variables relatives à l'éducation (durée moyenne de scolarisation, durée attendue de scolarisation) et 100 dollars PPA (Parité de Pouvoir d'Achat) pour le revenu national brut (*RNB*) par habitant.

Valeurs extrêmes de l'indice de développement humain pour ce rapport

Indicateurs	Valeur maximale observée	Valeur minimale
Espérance de vie à la naissance	83,4 (Japon, 2011)	20,0
Durée moyenne de scolarisation	13,1 (République tchèque, 2005)	0
Durée attendue de scolarisation	18,0 (limitée)	0
Indice combiné de l'éducation	0,978 (Nouvelle-Zélande, 2010)	0
Revenu national brut par habitant (en PPA en $)	107,721 (Qatar, 2011)	100

Une fois définies les valeurs minimales et maximales, les indices dimensionnels se calculent de la manière suivante :

$$Indice\ dimensionnel = \frac{valeur\ réelle - valeur\ minimale}{valeur\ maximale - valeur\ minimale} \qquad (1)$$

Pour le développement économique, on utilise une échelle logarithmique.

Pour l'éducation, l'équation (1) est utilisée pour chacune des deux composantes, puis nous appliquons de nouveau l'équation (1) à la moyenne géométrique des deux indices obtenus précédemment, en utilisant 0 comme valeur minimale et, comme valeur maximale, la valeur la plus élevée des moyennes géométriques des indices obtenus pour la période considérée.

En résumé, les indices dimensionnels s'obtiennent par les formules suivantes :

$$I_{PIB} = \frac{\ln(RNB)\ \ \ln(100)}{\ln(107721) - \ln(100)} \text{ où ln désigne le logarithme népérien}$$

$$I_{vie} = \frac{valeur\ réelle\ du\ pays - 20}{83{,}4 - 20}$$

$$I_1 = Indice\ de\ la\ durée\ moyenne\ de\ scolarisation = \frac{valeur\ réelle\ du\ pays - 0}{13{,}1 - 0}$$

$$I_2 = Indice\ de\ la\ durée\ attendue\ de\ scolarisation = \frac{valeur\ réelle\ du\ pays - 0}{18 - 0}$$

$$I_{éducation} = \frac{\sqrt{I_1 I_2} - 0}{0{,}978 - 0}$$

a) Calculer I_{PIB} en 2011, respectivement pour le Cameroun et le Mali avec les données suivantes de *RNB* (*PIB*/hab) en 2011 : Cameroun = 2 031 ; Mali = 1 123

b) Calculer I_{vie} en 2011, respectivement pour la Cameroun et le Sénégal, sachant que l'espérance de vie à la naissance était de 51,6 ans pour le Cameroun en 2011 et de 59,3 ans au Sénégal

c) Calculer $I_{éducation}$ en 2011, respectivement pour le Cameroun et le Niger, sachant que la durée moyenne de scolarisation était de 5,9 ans pour le Cameroun en 2011 et de 1,4 ans pour le Niger et que la durée attendue de scolarisation était de 10,3 ans pour le Cameroun en 2011 et de 4,9 ans pour le Niger.

<u>Question 2</u> – Commentaires sur les indices multidimensionnels

a) A partir des résultats obtenus à la question 1, compléter le tableau 1 ci-dessous que vous recopierez dans votre copie.

Tableau 1

	Cameroun	Mali	Niger	Sénégal
I_{PIB}			0,266	0,406
I_{vie}		0,588	0,650	
$I_{éducation}$		0,272		0,387

b) Commenter les résultats des indicateurs inscrits dans le tableau 1

Question 3 – Indice *IDH*

Le tableau 2 ci-dessous fournit pour quelques pays les composantes de l'*IDH*. Calculer l'*IDH* de chacun des pays.

Tableau 2

Pays	Espérance de vie à la naissance (en années)	Durée moyenne de scolarisation (en années)	Durée attendue de scolarisation (en années)	*PIB*/hab (en dollars et en PPA)
Cameroun	51,6	5,9	10,3	2 031
Mali	51,4	2,0	8,3	1 123
Niger	54,7	1,4	4,9	641
Sénégal	59,3	4,5	7,5	1 708

Question 4 – Corrélation *IDH/PIB*

Le tableau 3 ci-dessous fournit pour quelques pays le niveau du *PIB* par habitant et la valeur de l'*IDH*.

Tableau 3

Pays	*PIB*/hab	*IDH*
Belgique	33 357	0,886
Bénin	1 364	0,427
Brésil	10 162	0,718
Chine	7 476	0,687
Côte d'Ivoire	1 387	0,400
Etats-Unis	43 017	0,910
France	30 462	0,884
Japon	32 295	0,901
Qatar	107 721	0,831
Fédération de Russie	14 561	0,755

a) Commenter ces résultats

b) On donne les éléments suivants : Moyenne(*PIB*/hab)=28 180 ; Moyenne(*IDH*)=0,740 ; Variance(*PIB*/hab)= 897 159 313 ; Variance(*IDH*)= 0,03222409 ; Covariance(*PIB*/hab; *IDH*)=3 030.

Rappeler la définition du coefficient de détermination (R^2) et faites le calcul sur ces 10 pays. Commenter le résultat obtenu. Ces commentaires auraient-ils été différents si les données du Qatar ne figuraient pas dans le tableau 3 ? Expliciter

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1) Pour que l'équation soit définie, on doit avoir $x > -4$ et $x < 3$. $\ln(x+4) = \ln(6-2x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

2) Pour que l'équation soit définie, on doit avoir $x > 2$. $\ln(3x+5) + \ln(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{157}}{6}$ ou $\frac{1+\sqrt{157}}{6}$. La solution est donc $\frac{1+\sqrt{157}}{6}$.

3) Pour que l'inéquation soit définie, on doit avoir $x > 0$. En utilisant $X = \ln x$ et le fait que $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$, on trouve que l'ensemble des solutions est $]0, 1/e] \cup [e^5, +\infty[$.

4) Les solutions sont 0 et ln4.

Exercice 2

1) La variable aléatoire X donnant le nombre de femmes choisies suit une loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,5.
P(A) = $\binom{10}{8}(0,5)^{10}$ = 0,044
P(B) = P(X=8)+ P(X=9)+ P(X=10) = 0,055

2) L'événement contraire de l'événement H « Il y a au moins un homme dans l'échantillon de n personnes » est l'événement $\bar{H}$ « Il y a n femmes dans l'échantillon ». On veut $P(H) > 0,999$. C'est à dire $1 - (0,5)^n > 0,999$. On obtient $n \geq 10$.

Exercice 3

Partie A - Construction d'une suite de nombre réels convergeant vers $\sqrt{2}$

1) Evident

2) Graphique non fait ici (le graphe de la fonction est une hyperbole)

3) $u_n \geq 0$: évident de part la fonction f sur le domaine de définition
   $u_n \leq 1$: démonstration par récurrence en calculant $u_{n+1} - 1$

4) Evident en faisant le rapport des valeurs absolues

5) Il suffit de montrer que $\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)} \leq \frac{1}{4}$, ce qui est aisé en utilisant la question 4

6) La limite de la suite $(u_n + 1)$ est $\sqrt{2}$

Partie B - Propriétés de la suite (u_n)

1) $u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{5}, u_3 = \frac{5}{12}, u_4 = \frac{12}{29}, u_5 = \frac{29}{60}$

2) Démonstration par récurrence

3) Etape 1 : la suite (u_n) est positive (question A4).
   Etape 2 : on montre que $u_{n+2} - u_n > 0$ quand $u_n < \sqrt{2} - 1$ et que $u_{n+2} - u_n < 0$ quand $u_n > \sqrt{2} - 1$
   Etape 3 : on montre par récurrence que tous les termes pairs de la suite (u_n) sont plus petits que $\sqrt{2} - 1$ et que tous les termes impairs de la suite (u_n) sont plus grands que $\sqrt{2} - 1$

4) a) En résolvant, on trouve *u'=u* et *v'=v-2u*

   b) Evident et la question précédente montre que $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = 2q_n + p_n$ sont bien premiers entre eux

   c) Etape 1 : on montre que $q_{n+1} - q_n = q_n + q_{n-1}$
   Etape 2 : on résout l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ qui donne comme racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2} + 1$
   Etape 3 : q_n s'écrit sous la forme $\alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$). On résout en utilisant les premières valeurs de la suite (q_n) et on trouve $\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4

1) On remarque que $f(x) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Ainsi, la fonction *f* est continue en 0 et *f* est dérivable en 0 avec *f'*(0) = 1. La fonction *f* est continue sur R. En la dérivant, on constate qu'elle est strictement croissante. De plus, $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$. La fonction *f* est une bijection strictement croissante de R dans R. Elle admet donc une fonction réciproque définie sur R.

2) Puisque $f'(0) \neq 0$ et que la fonction *f* est C^∞ au voisinage de 0, la fonction réciproque est indéfiniment dérivable au voisinage de 0. En posant $f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ et en utilisant le fait que $f o f^{-1}(x) = x$, on a :

a = 1 , b = 0, c = -1/2

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

a) I_{PIB} (Cameroun) = 0,431 ; I_{PIB} (Mali) = 0,346

Ces indices sont, par construction, compris entre 0 et 1. La valeur 1 de l'indice est atteinte par le Qatar. On s'aperçoit que ces deux pays, bien qu'ayant un rapport de presque 1 à 2 en valeur sur le *PIB*/hab, sont relativement proches en terme d'indice.

b) I_{vie} (Cameroun) = 0,498 ; I_{vie} (Sénégal) = 0,620

La valeur de ces indices est toujours comprise entre 0 et 1 et l'écart constaté entre ces deux pays est plus élevé que dans la question précédente. Le dénominateur (83,4-20) est l'amplitude entre la valeur minimale définie comme valeur de subsistance et l'espérance de vie à la naissance constaté dans un pays donné, en l'occurrence au Japon en 2011.

c) Pour calculer l'indice demandé, il faut d'abord calculer les deux indices élémentaires sur les deux indicateurs :

I_1 (Cameroun) = 0,374 ; I_2 (Cameroun) = 0,572

I_1 (Niger) = 0,107 ; I_2 (Niger) = 0,078

On en déduit : $I_{éducation}$ (Cameroun) = 0,473 et $I_{éducation}$ (Niger) = 0,093

Là encore, la valeur des indices est comprise par construction entre 0 et 1. L'écart entre les deux pays proposés est très grand puisque le rapport est presque de 5.

Question 2

a) Evident : il suffit de copier le tableau 1 proposé en remplissant les cases vides avec les calculs faits à la première question.

b) On s'aperçoit que l'indicateur sur l'espérance de vie est moins discriminatoire que les deux autres indicateurs. Si l'on devait choisir parmi les trois indicateurs, il apparaît que c'est l'éducation qui est le facteur le plus discriminant pour les pays proposés.

Question 3

Il ne faut pas utiliser les données du tableau 2 mais il faut se servir des calculs réalisés à la question 1 et figurant en résumé dans le tableau 1 :

IDH (Cameroun) = 0,467 ; *IDH* (Mali) = 0,402 ; *IDH* (Niger) = 0,336 ;
IDH (Sénégal) = 0,471

Question 4

a) Les pays qui ont les plus faibles montants sur le ratio *PIB*/hab sont aussi ceux qui ont un *IDH* faible, il y a une forte hétérogénéité entre les pays, etc.

b) Le coefficient de détermination, noté r^2 est le rapport de la covariance au carré divisé par le produit des variances : r^2 = Covariance (*PIB*/hab ; *IDH*) x Covariance (*PIB*/hab ; *IDH*) / Variance (*PIB*/hab) x Variance (*IDH*)

Donc $r^2 = 0{,}318$

Ce coefficient n'est pas proche de 1, ce qui signifie qu'il n'y a pas une forte corrélation entre les deux variables observées (*IDH* et *PIB*/hab). Cependant, compte tenu du faible nombre de pays, on peut penser que le calcul aurait été tout autre si le Qatar avait été enlevé du tableau.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note* : *Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat.

Exercice 1

Partie A

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = Ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = Ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Où ln désigne le logarithme népérien.

1 . Etudier les variations de f et de g sur $[0;+\infty[$

2 . En déduire un encadrement de $Ln(1+x)$

Partie B

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

1 . Montrer que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$

2 . Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$Ln\, u_n = Ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + Ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + ... + Ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3 . On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^n}$

Montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2} \ T_n \leq Ln \ u_n \leq S_n$$

4 . Calculer S_n et T_n en fonction de *n*. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

5 . Etude de la convergence de la suite (u_n)

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite

c. En déduire un encadrement de ℓ

<u>Exercice 2</u>

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est de 0,4 et, s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

1 . On note :

. D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;

. R_1 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel »

Calculer la probabilité de l'évènement R_1

2 . Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est de 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

. D_2 l'évènement « la personne décroche au second appel »

. R_2 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du second appel »

. R l'évènement « la personne répond au questionnaire »

Calculer la probabilité de l'évènement R

3 . Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel.

4 . Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Calculer la probabilité pour que 20% des personnes répondent au questionnaire.

Exercice 3

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

Exercice 4

Soit $(v_1,...,v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel réel *E*. Pour *k* = 1, …, *n*-1, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ *et* $w_n = v_n + v_1$. Etudier l'indépendance linéaire de la famille $(w_1,..., w_n)$.

Exercice 5

Dans *C* (ensemble des nombres complexes), on appelle polynômes de Legendre les polynômes $P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$. (Remarque : la notation *(n)* en exposant signifie qu'il s'agit de la dérivée d'ordre *n*).

1 . Calculer le degré de P_n et son coefficient dominant.

2 . Pour $0 \le p \le n$, on pose $Q_p(X) = \left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(p)}$.

a. Donner le degré de Q_p

b. Démontrer que Q_p admet deux zéros d'ordre *n* - *p*, et *p* zéros d'ordre 1.

3 . En déduire que P_n s'annule exactement en *n* points deux à deux distincts de $]-1,1[$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le secteur des technologies de l'information et de la communication est en croissance en Afrique, avec une forte augmentation de l'utilisation d'Internet et de la téléphonie mobile. Exposez dans quelle mesure cela est un indicateur de développement.

Sujet n° 2

Un des huit objectifs du millénaire pour le développement[1] est de préserver l'environnement. Explicitez en quoi cela constitue un enjeu pour éliminer la pauvreté.

Sujet n° 3

Le 10 octobre 2013, Joyce Banda, la présidente du Malawi (Etat d'Afrique australe), a limogé son gouvernement après la révélation d'une affaire de soupçons de corruption et de détournement de fonds publics. Une telle décision peut-elle rétablir la confiance avec la population et les bailleurs de fonds ? Prolongez votre propos en exposant d'autres mesures propices à rétablir la confiance.

[1] Le Sommet du Millénaire, qui s'est tenu du 6 au 8 septembre 2000 au Siège de l'Organisation des Nations Unies, à New York, s'est conclut avec l'adoption par les 189 États Membres de la Déclaration du Millénaire, dans laquelle ont été énoncés les huit objectifs du Millénaire pour le développement (OMD).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Croissance et inégalités.

Sujet n° 2

MICROECONOMIE (10 points)

Le producteur (7 points)

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de coût est donnée par :

$$C(q) = 2q^3 + 32$$

Soit p, le prix de l'output.

1) Est-ce une approche d'équilibre général ou partiel (justifiez votre réponse) ?

2) Après avoir rappelé leur définition, donnez les fonctions de coût marginal et de coût moyen.

3) Quel est le seuil de rentabilité ? Interprétez.

4) Quelle est la fonction d'offre du producteur ? Interprétez.

5) Représentez succinctement sur un graphe le profit du producteur pour un prix p quelconque.

Supposons désormais que ce producteur est en situation de monopole et qu'il fait face à une demande donnée par :

$$S(p) = 60 - p$$

6) Ce monopole est-il naturel (justifiez votre réponse) ? Quelles peuvent être les causes d'un tel monopole ?

7) En quoi son comportement change par rapport à la concurrence parfaite ?

8) Donnez son choix optimal.

9) Représenter succinctement sur un graphe le choix du monopole. Combien aurait produit à ce prix le producteur en concurrence parfaite ? Comparez l'efficacité des deux situations, du point de vue du producteur puis des consommateurs.

L'échange (3 points)

Deux consommateurs A et B ont les mêmes préférences représentées par la fonction d'utilité :

$$U(q_1, q_2) = q_1\, q_2^3$$

Leurs dotations initiales sont $Q_{A0} = (6, 2)$ et $Q_{B0} = (1, 9)$.

1) Ont-ils intérêt à échanger (justifiez votre réponse) ?

2) Donnez les fonctions de demande de biens de chacun en fonction des prix p_1 et p_2 donnés.

3) Donnez la fonction de demande nette globale de bien 1. *En déduire* celle de bien 2.

4) En prenant le bien 1 comme numéraire, donnez un vecteur de prix d'équilibre.

MACROECONOMIE (6 points)

On considère le modèle offre globale – demande globale (AS – AD, en anglais), où Y, N, L^S, W, P^e, u, z, L^d, P et μ sont respectivement la production, la population active occupée, l'offre de travail, le salaire nominal, le niveau général des prix anticipé, le taux de chômage, les allocations chômage, la demande de travail, le niveau général des prix et le taux de marge des entreprises.

[1] $Y = N$ décrit la fonction de production,

[2] $L^S = \dfrac{W}{P^e} + 2\,(u - z)$ décrit la fonction d'offre de travail,

[3] $L^d = -\frac{W}{P^e}$ décrit la fonction de demande de travail,

[4] $P = (1+\mu)\,W$ est l'équation de prix (les entreprises étant supposées influencer le niveau général des prix),

[5] $Y = Y(M/P, G, T)$ où $Y(.)$ est la fonction de demande globale, avec M, la masse monétaire, G, les dépenses publiques et T, les impôts.

Questions

1) D'après ce qui précède, les marchés du travail et des biens sont-ils en concurrence parfaite (justifiez votre réponse) ?

2) A l'équilibre du marché du travail, quelle est l'expression du salaire nominal ? Sur la base de cette expression, précisez la manière dont le salaire nominal varie avec le taux de chômage et avec les allocations chômage, en étayant, à chaque fois, votre réponse à l'aide d'un raisonnement « économique » utilisant les équations du modèle.

3) Déterminez l'équation d'offre globale et indiquez de quelle manière varie P avec u.

4) En déduire la relation entre P et Y (rappel : $U + N = L$, avec U, nombre de chômeurs et L, la population active) ainsi que le sens de variation de la courbe d'offre globale.

5) Après avoir rappelé de quelle manière varie la demande globale par rapport à chacun de ses arguments (représentés dans l'équation [5]), précisez l'effet d'une augmentation de P sur la demande globale ; déduisez-en le sens de variation de la courbe de demande globale.

QUESTIONS (4 points)

1) La valeur travail chez Marx.

2) A l'aide d'un diagramme d'Edgeworth, expliquez le lien entre échange et critère d'efficacité de Pareto.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Note* : *La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires donnés après chaque résultat.

Un méthodologue du ministère chargé de la statistique doit effectuer un audit du plan de sondage actuel pour une enquête réalisée mensuellement.

1. Le plan de sondage actuel

L'échantillon des entreprises interrogées dans l'enquête mensuelle est tiré dans le champ des entreprises ayant répondu à l'enquête annuelle.

A la date de tirage des échantillons pour l'enquête mensuelle de l'année N (date qui se situe vers la fin du dernier trimestre N-1), les résultats de l'enquête annuelle N-2 sont disponibles. L'échantillon est donc tiré à partir des informations datées de deux ans.

L'unité d'échantillonnage est un produit d'une entreprise.

La méthode de tirage des échantillons de l'enquête mensuelle n'est pas aléatoire. Pour un produit donné, la méthode de sélection consiste à :

- trier les entreprises concernées par le produit par valeurs décroissantes de chiffre d'affaires réalisé pour le produit considéré ;
- retenir les entreprises dans l'échantillon jusqu'à couvrir au moins 75% du chiffre d'affaires total du produit.

Dans cet exercice, l'audit portera sur un seul produit.

2. Description des données

Sur le produit concerné par l'exercice, le tableau joint en annexe vous donne les réponses individuelles des entreprises à l'enquête annuelle pour les années 2011 et 2012.

En 2012, 39 entreprises ont répondu à l'enquête annuelle. L'échantillon pour l'enquête mensuelle 2014 est donc choisi avec ces données.

Question 1 : à la lecture du tableau joint en annexe, indiquer le nombre d'entreprises ayant répondu en 2011 à l'enquête annuelle.

Question 2 : indiquer le nombre d'unités qui n'étaient pas présentes en 2011 dans l'enquête annuelle, le montant total en kE qu'elles représentent en 2012, la part qu'elles représentent en 2012.

Question 3 : compléter le tableau ci-dessous sur la base des entreprises présentes dans la base de sondage des données 2012 et 2011 (c'est-à-dire répondantes sur les deux années) :

	Présents dans l'échantillon 2014 et dans la base de sondage 2012 et 2011	Absents de l'échantillon 2014 et présents dans la base de sondage 2012 et 2011	**Total** (présents dans la base de sondage 2012 et 2011)
Somme des montants 2012			
Somme des montants 2011			
Taux d'évolution			

Question 4 : indiquer le biais de la méthode actuelle qui est la différence entre l'évolution réelle et celle constatée dans l'échantillon.

Question 5 : commenter les résultats obtenus.

3. Comment assurer une certaine continuité avec la méthode de tirage précédente

L'introduction d'une méthode aléatoire, représentant l'ensemble des unités, dans le tirage de l'échantillon, devrait permettre de produire une estimation du taux d'évolution plus proche de la réalité.

Si l'on souhaite assurer une certaine continuité avec les méthodes de tirage précédentes, il paraît intéressant d'imposer une strate exhaustive couvrant une certaine part du montant total du produit (actuellement la procédure consiste à sélectionner les plus grandes entreprises concernées par un produit jusqu'à couvrir au moins 75% du montant total du produit).

Question 6 : à la lecture du tableau joint en annexe, indiquer la taille actuelle n de l'échantillon 2014.

Question 7 : calculer le seuil de couverture correspondant à un tirage proportionnel au montant avec la taille d'échantillon actuelle selon la formule $n\frac{y_k(2012)}{t_y(2012)} \geq 1$, où t_y (2012) est la somme des y_k (2012) des entreprises présentes. Ici t_y(2012) est égal à 287.994 keuros.

Question 8 : indiquer le nombre d'entreprises sélectionnées par la méthode de la question précédente et le seuil de couverture.

Dans la suite, on a effectué les calculs avec trois taux de couverture différents : 0% (pas de strate exhaustive), 19,1%, 76,2%. Pour notre produit, les nombres d'unités à tirer dans la strate exhaustive sont, en fonction des taux de couverture en montant visés, les suivants :

Taux de couverture pour la strate exhaustive	Seuil de y_k correspondant en kE	Nombre d'unités dans la base de sondage 2012	dont présentes aussi dans la base de sondage 2011
0%	40.000	0	0
19,1%	18.000	2	2
76,2%	7.800	16	15

4. Partie non exhaustive

Dans cette première approche, on sélectionne un échantillon de taille n_{nexh} selon un sondage aléatoire simple dans la partie non exhaustive de façon à ce que l'écart-type dû à l'échantillonnage de l'estimation du taux d'évolution soit de x.

On se limite aux unités de la base de sondage 2012 qui étaient présentes en 2011 et on calcule les u_k :

$$u_k = \frac{1}{t_y(2011)}\left(y_k(2012) - \frac{t_y(2012)}{t_y(2011)} y_k(2011) \right)$$ avec $t_y(2012)$= 275.407 et $t_y(2011)$= 301.708

On peut calculer le nombre d'unités à tirer dans la partie non exhaustive n_{nexh} pour obtenir un écart-type dû à l'échantillonnage noté x avec la formule suivante :

$$n_{nexh} = \frac{1}{\frac{x^2}{N_{nexh}^2 S_{unexh}^2} + \frac{1}{N_{nexh}}} \quad \text{avec } S_{unexh}^2 = \frac{1}{n_{nexh} - 1} \sum_{nexh} (u_k - \bar{u})^2$$

Où $\bar{u}$ désigne la moyenne des u_k et N_{nexh} le nombre d'unités dans la partie non exhaustive.

On obtient les résultats suivants lorsque l'on fait varier le taux de couverture pour la strate exhaustive et l'écart-type dû à l'échantillonnage visé :

Taux de couverture pour la strate exhaustive	Écart-type dû à l'échantillonnage pour l'estimation du taux d'évolution *X*	Nombre d'unités à tirer parmi les présents-présents dans la strate exhaustive	Nombre d'unités à tirer parmi les présents-présents dans la strate non exhaustive	Nombre d'unités à tirer au total parmi les présents-présents
0%	0,01	0	36	36
19,1%	0,01	2	29	31
75%	0,01	15	16	31
0%	0,02	0	34	34
19,1%	0,02	2	20	22
75%	0,02	15	9	24
0%	0,03	0	32	32
19,1%	0,03	2	13	15
75%	0,03	15	5	20
0%	0,04	0	29	29
19,1%	0,04	2	9	11
75%	0,04	15	3	18
0%	0,05	0	27	27
19,1%	0,05	2	6	8
75%	0,05	15	2	17

<u>Question 9</u> : avec la taille d'échantillon actuelle que vous avez indiqué à la question 6 et en prenant le taux de couverture que vous avez indiqué à la question 8, donner une estimation de l'écart-type dû à l'échantillonnage du taux d'évolution.

<u>Question 10</u> : commenter les résultats obtenus.

Annexe

Liste des entreprises fabricant le produit étudié avec leurs facturations annuelles

NUM K	Enquête mensuelle SELECTION 2014	PRESENCE ECHANTILLON 2013	Données de l'enquête annuelle MONTANT 2011 (en keuros) $y_k(2011)$	MONTANT 2012 (en keuros) $y_k(2012)$	PDSIND 2012	PDSCUM 2012
1	1	1	66312	36320	12,6%	12,6%
2	1	1	16345	18782	6,5%	19,1%
3	1	1	15820	16146	5,6%	24,7%
4	1	1	15455	15362	5,3%	30,1%
5	1	1	15228	15228	5,3%	35,4%
6	1	1	12665	14025	4,9%	40,2%
7	1	1	13418	13481	4,7%	44,9%
8	1	1	13357	12350	4,3%	49,2%
9	1	0		11100	3,9%	53,1%
10	1	0	8112	10345	3,6%	56,6%
11	1	0	6798	10260	3,6%	60,2%
12	1	1	11377	10094	3,5%	63,7%
13	1	1	9723	9900	3,4%	67,2%
14	1	1	9336	9736	3,4%	70,5%
15	1	0	8670	8401	2,9%	73,4%
16	1	1	7563	7850	2,7%	76,2%
17	0	0	5654	6382	2,2%	78,4%
18	0	0	5739	5962	2,1%	80,5%
19	0	0	6823	5404	1,9%	82,3%
20	0	1	9951	5403	1,9%	84,2%
21	0	0	5028	5220	1,8%	86,0%
22	0	0	3200	4366	1,5%	87,5%
23	0	0	5507	4336	1,5%	89,0%
24	0	0	3819	3910	1,4%	90,4%
25	0	0	2951	3856	1,3%	91,7%
26	0	0	3320	3678	1,3%	93,0%
27	0	0	3556	3112	1,1%	94,1%
28	0	0	2576	3067	1,1%	95,2%
29	0	0	3301	2984	1,0%	96,2%
30	0	1	2688	2298	0,8%	97,0%
31	0	0	2211	2215	0,8%	97,8%
32	0	0	1998	1881	0,7%	98,4%
33	0	0	1666	1503	0,5%	98,9%
34	0	0		1487	0,5%	99,5%
35	0	0	878	1130	0,4%	99,9%
36	0	0	42	203	0,1%	99,9%
37	0	0	436	102	0,0%	100,0%
38	0	0	145	75	0,0%	100,0%
39	0	0	40	40	0,0%	100,0%

NUM : il s'agit du numéro de l'entreprise permettant de la repérer dans la base de sondage.
SELECTION 2012 : il s'agit d'une indicatrice : 0 signifie que l'entreprise n'est pas sélectionnée dans l'échantillon de l'enquête mensuelle selon la méthode actuelle et 1 qu'elle l'est.
PRESENCE ECHANTILLON 2011 : il s'agit d'une indicatrice : 0 signifie que l'entreprise n'était pas sélectionnée en 2011 dans l'enquête mensuelle et 1 qu'elle l'était.
MONTANT 2011 et MONTANT 2012 : il s'agit des montants de facturations figurant dans l'enquête annuelle.
PDSIND 2012 : il s'agit du poids économique de l'entreprise pour ce produit. Dans ce tableau, les entreprises sont classées selon ce critère.
PDSCUM 2012 : il s'agit du poids économique cumulé.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Partie A

1 . Les fonctions *f* et *g* sont dérivables sur $[0;+\infty[$ et pour $x \geq 0$:

$$f^{'}(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0 \text{ et } g^{'}(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

Les limites en $+\infty$ sont $-\infty$ pour la fonction *f* et $+\infty$ pour la fonction *g*

Remarque : les tableaux de variations ne sont pas faits.

2 . Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que *f* est négative sur $[0;+\infty[$ et que *g* est positive sur $[0;+\infty[$.

On a donc pour tout $x \geq 0$,

$\ln(1+x) - x \leq 0$

$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$

Ce qui donne :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Partie B

1 . $u_n > 0$ pour $n \geq 1$

On raisonne par récurrence sur *n*.

On a $u_1 = \frac{3}{2} > 0$ et la propriété est vérifiée pour n = 1.

Si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$, donc d'après le principe de récurrence :

$$u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

2 . pour tout $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

On raisonne par récurrence sur *n*.

. Pour *n* = 1, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\ln u_1 = \ln\left(1+\frac{1}{2^1}\right)$ et la propriété est vérifiée au rang 1.

. Supposons que, pour un certain entier n, $\ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

On a alors par définition :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)=\ln u_n+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Et la propriété est vérifiée au rang *n* + 1.

3 . Il résulte de la partie A, question 2 que pour tout $k \in N^*$

$$\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\text{x}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leq \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}\leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$$

Soit :

$$S_n-\frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4 . Les sommes S_n et T_n sont des sommes de termes de suite géométrique.

$$\text{S}_n = 1-\frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \text{T}_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{S}_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\text{T}_n=\frac{1}{3}$

5 . a . Variations de u_n

On a pour tout $n \geq 1$, u_n strictement positif :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 \text{ donc } u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante

b. Etude de la convergence de (u_n)

On a de plus pour $n \geq 1$: $\ln u_n \leq \mathrm{S}_n \leq 1$

Donc : $u_n \leq e$

La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

c. Comme la suite (u_n) est croissante et à termes strictement positifs, on a ℓ >0. La fonction ln est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln u_n = \ln \ell$

De l'encadrement : $\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n \leq \ln u_n \leq \mathrm{S}_n$

On déduit : $\lim\limits_{n\to*\infty}\left(\mathrm{S}_n - \frac{1}{2}\mathrm{T}_n\right) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$

Soit : $1 - \frac{1}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ ➔ $e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e$

Exercice 2

1. $p(\overline{D_1}) = 0{,}4$ et donc $p(D_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
$p(R_1 / D_1) = 0{,}3$

Comme $R_1 \subset D_1$ on a : $p(R_1) = p(R_1 \cap D_1) = p(D_1)p(R_1 / D_1)$
$p(R_1) = 0{,}6 \text{ x } 0{,}3 = 0{,}18$

2. $p(\overline{D_2} / \overline{D_1}) = 0{,}3$ car pour que la personne ne décroche pas la seconde fois, il faut qu'elle n'ait pas décroché la première fois et ait été rappelée, et $p(R_2 / D_2) = 0{,}2$

On en déduit $p(D_2 / \overline{D_1}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ et comme $D_2 \subset \overline{D_1}$,
$p(D_2) = p(D_2 \cap \overline{D_1}) = p(\overline{D_1}) \text{x } p(D_2 / \overline{D_1}) = 0{,}4 \text{ x } 0{,}7 = 0{,}28$
Comme $R_2 \subset D_2$ on en déduit :
$p(R_2) = p(R_2 \cap D_2) = p(D_2)p(R_2 / D_2) = 0{,}056$

Enfin puisque R est la réunion disjointe de R_1 et R_2 , on obtient :
$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0{,}236$

3 . $P_R(R_1) = \frac{p(R \cap R_1)}{p(R)} = \frac{p(R_1)}{p(R)} = \frac{0,18}{0,236}$

4 . On a un schéma de Bernoulli dans lequel la probabilité de succès est $p = p(R) = 0,236$.
Le nombre de personnes qui répondent au questionnaire est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (25 ; p).
On cherche :

$$p(X = 5) = \binom{25}{5}(0,236)^5(1-0,236)^{20}$$

On obtient :

$$p(X = 5) = 0,179 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Exercice 3

On écrit : $\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$

Ce qui donne par produit $\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1(a-b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + (-b^3 + ab^2)x^6 + o(x^6)$

Finalement, le développement limité de la fonction est donné par :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \left(-a + b - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-b^2 + ab + \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(+b^3 - ab^2 - \frac{1}{120}\right)x^6$$

Le terme d'ordre 2 disparaît si $b - a = 1/2$, et celui d'ordre 4 disparait aussi si :

$$-b(b-a) = -\frac{1}{24} \Leftrightarrow b = 1/12$$

Dans ce cas, on trouve a = -5/12 et pour ces valeurs de a et b, on trouve une partie principale de degré 6 :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \frac{1}{480}x^6$$

Exercice 4

Supposons qu'il existe *n* scalaires $\lambda_1,...,\lambda_n$ tels que $\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = 0$

Ceci se réécrit en : $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (v_k + v_{k+1}) + \lambda_n (v_n + v_1) = 0$

Soit encore : $(\lambda_1 + \lambda_n) v_1 + \sum_{k=2}^{n} (\lambda_{k-1} + \lambda_k) v_k$

Puisque le système $(v_1,...,v_n)$ est linéairement indépendant, on en déduit le système :

$$\begin{cases} \lambda_n = -\lambda_1 \\ \lambda_k = -\lambda_{k-1} \text{ pour } 2 \le k \le n \end{cases}$$

La deuxième égalité donne facilement par récurrence, pour $2 \le k \le n$, $\lambda_k = (-1)^{k-1} \lambda_1$.

En particulier on a $\lambda_n = (-1)^{n-1} \lambda_1$.

On discute maintenant suivant la parité de *n* :

1. Si *n* est impair on a à la fois $\lambda_n = \lambda_1$ et $\lambda_n = -\lambda_1$. Ceci impose $\lambda_1 = 0$ et par suite $\lambda_k = 0$ pour tout *k*. Le système est libre.

2. Si *n* est pair, la dernière équation est $\lambda_n = -\lambda_1$, qui est la même que la première. Elle se simplifie donc. Pour $\lambda_k = (-1)^k$, on a alors $\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = 0$. Le système est lié.

Exercice 5

1 . Le terme de plus haut de degré P_n est obtenu en dérivant *n* fois X^{2n}. Il vaut donc $\frac{2n!}{n!} X^n$.

2 .

a. Le terme de plus haut de degré Q_p est obtenu en dérivant *p* fois X^{2n}. Il est de degré 2*n*-*p*. Il a donc au plus 2*n*-*p* racines.

b. Prouvons comme Q_p est continue par récurrence finie sur *p* dans $\{1,\dots n\}$ que Q_p admet exactement *p* racines distinctes dans $]-1,1[$.
Pour $p = 1$ on sait que $Q_0(-1) = Q_0(1) = 0$, et le théorème de Rolle donne l'existence d'une racine dans $]-1,1[$.

Supposons le résultat prouvé au rang p, et prouvons-le au rang $p+1$ avec $p+1 \leq n$. On note $-1 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p < 1$ les p racines de Q_p dont l'existence est donnée dans $]-1,1[$. Remarquons en outre que puisque 1 et -1 sont racines d'ordre n de Q_0, et que $p \leq n-1$, ces deux nombres sont encore racines de Q_p. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle $p + 1$ fois : une fois entre -1 et α_1, $p - 1$ fois entre α_k et α_{k+1} et une fois entre α_p et 1.

3 . On a donc prouvé que $P_n = Q_n$ a au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$. Comme il est de degré n, il a au plus n racines et donc P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $]-1,1[$.

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1 : 37

Question 2 : Le nombre d'unités qui n'étaient pas présentes en 2011 est 2, le montant total en kE qu'elles représentent en 2012 est 12.587 keuros. La part qu'elles représentent en 2012 est de 4,4% des montants de l'année 2012 (12.587 / 287.994).

Question 3 :

	Présents dans l'échantillon 2014, dans la base de sondage 2012 et 2011	Absents de l'échantillon 2014 et présents dans la base de sondage 2012 et 2011	**Total** (présents dans la base de sondage 2012 et 2011)
Somme des montants 2012	208280	67127	275407
Somme des montants 2011	230179	71529	301708
Taux d'évolution	-9,51%	-6,15%	-8,72%

Question 4 : Le biais de la méthode actuelle qui est la différence entre l'évolution réelle et celle constatée dans l'échantillon est de 9,51% - 8,72% soit 0,79%.

Question 5 : On voit dans le tableau ci-dessus que les plus grosses unités (celles présentes dans l'échantillon 2012) n'ont pas évolué de la même façon que les plus petites qui sont absentes de l'échantillon par construction.

Question 6 : 16

Question 7 : y_k = 18.000 keuros.

Question 8 : Cela correspond à retenir les deux premières entreprises, soit un seuil de couverture de 19,1%.

Question 9 : n étant égal à 15, on trouve x = 0,03.

Question 10 : Le biais actuel est de 0,79%, cette méthode semble, pour ce produit, moins précise que la méthode actuelle puisqu'il conduit à un biais de 3%.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat.**

Exercice 1

Question 1

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Dans R^3, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(a, -5, 1-a)$ et $(1+b, 1, b)$.

Calculer la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux.

Question 2

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit à la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie. Le jeu continue.
Pour tout entier n, on désigne par :

- A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie » ;
- B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie » ;
- C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie ».

a) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.

b) Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de n.

c) Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de n.

Question 3

a) Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

<u>Exercice 2</u>

Dans R^3, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives (1, -1, 1), (2, -2, 2), (2, -1, 2).

Question 1

Peut-on trouver un vecteur $\vec{z}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ soit un système libre ? Si oui, construisez-en un.

Question 2

Même question en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{w}$.

<u>Exercice 3</u>

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

<u>Exercice 4</u>

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. On définit :

- Leur moyenne arithmétique, notée m, par la relation $m = \frac{x+y}{2}$;
- Leur moyenne géométrique, notée g, par la relation $g = \sqrt{xy}$;
- Leur moyenne harmonique, notée h, par la relation $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

Question 1

Montrer que $h \leq g \leq m$ et vérifier que $\sqrt{mh} = g$.

Question 2

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence par la donnée de u_0 et v_0 avec $0 < v_0 \leq u_0$ et par les relations de récurrence suivantes :

- u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n ;
- v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n.

a) Montrer que pour tout entier n, on a $0 < v_n \leq u_n$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

c) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite notée b.

d) Montrer que b est la limite géométrique de u_n et v_n .

<u>Exercice 5</u>

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ?

Question 1

a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.

b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

Question 2

On note M la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante : on numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B) et de même poids. On note alors $M_{i,j}$ les coefficients de la i-ième ligne et de j-ième colonne de la matrice M de la façon suivante :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 \ si \ j = i \\ 0 \ si \ le \ j - ième \ mouton \ se \ trouve \ dans \ le \ troupeau \ A \\ 2 \ si \ le \ j - ième \ mouton \ se \ trouve \ dans \ le \ troupeau \ B \end{cases}$$

On note X la matrice uni-colonne de taille 101constituée des poids des moutons :

$$X = \begin{pmatrix} poids \ du \ mouton \ 1 \\ poids \ du \ mouton \ 2 \\ \vdots \\ poids \ du \ mouton \ 100 \\ poids \ du \ mouton \ 101 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $M\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}$

b) Calculer MX.

c) Montrer que la matrice M est inversible.

d) En déduire X.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Malgré une augmentation des dépenses de santé des ONG en Afrique, beaucoup de personnes ont encore un accès limité aux soins de bonne qualité. Apportez votre analyse sur ce constat de l'AMREF, ONG africaine de santé publique.

Sujet n° 2

De Gaulle disait « Les Etats n'ont pas d'amis, ils n'ont que des intérêts ». Développez les notions que cette phrase recouvre.

Sujet n° 3

« L'éducation est l'arme la plus puissante qu'on puisse utiliser pour changer le monde. » Explicitez cette phrase de Nelson Mandela, en illustrant votre propos.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Le progrès technique est-il nécessaire à la croissance ?

Sujet n° 2

Microéconomie (8 points)

Remarque : tous les résultats doivent être justifiés et interprétés.

Soit un consommateur en situation de concurrence parfaite dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité U définie par:

$$U(q_1, q_2) = q_1^2 \; q_2 \qquad \text{où } q_1 \text{ et } q_2 \text{ sont les quantités de bien 1 et 2.}$$

1. Existe-t-il des hypothèses particulières que doivent respecter les utilités marginales dans le modèle de concurrence parfaite ?

2. Donnez une autre fonction d'utilité représentant les préférences de ce consommateur (justifiez votre réponse).

3. Donnez le taux marginal de substitution. Interprétez.

4. Quelle est la forme de ses courbes d'indifférence ? A quelles propriétés précises de la relation de préférence correspond cette forme ?

5. Soit son revenu R et le vecteur de prix (p_1, p_2). Donnez ses fonctions de demandes optimales.

6. Les biens 1 et 2 sont-ils des biens normaux ? Donnez un exemple concret de bien non normal (justifiez votre réponse).

7. Si R = 12 et (p_1, p_2) = (2, 1), quel est son choix optimal ? Quel est son nouveau choix si désormais p_1= 1 ?

8. Distinguez par le calcul l'effet de revenu et l'effet de substitution liés à cette variation de prix. Représentez-les graphiquement (les courbes d'indifférence pouvant être tracées seulement succinctement). Interprétez ces deux effets du point de vue du consommateur, graphiquement et économiquement.

Macroéconomie (6 points)

Remarque : tous les résultats doivent être justifiés et interprétés.

On se place dans le cadre d'un modèle « IS-LM », en économie fermée avec des prix fixes (et exogènes). Ce modèle considère trois secteurs – celui des biens et services, celui de la monnaie et celui des titres – et trois types d'agents – l'Etat, les entreprises et les ménages. En outre, on y suppose une situation de sous-emploi des capacités de production.

$$Y = C + I + G \qquad [1]$$

où Y représente la production globale et le revenu, C, la part du produit global consommé par les ménages, I, celle « consommée » par les entreprises et G, celle « consommée » par l'Etat.

$$Y = C + S + T \qquad [2]$$

où Y représente le revenu global, S, l'épargne et T, les impôts.

On suppose que :

C=$C(Y)$, où $C(\cdot)$ représente la fonction de consommation keynésienne telle que $0<C'(Y)<1$;

I=$I(i)$, où $I(\cdot)$ représente la fonction d'investissement telle que $I'(i) < 0$.

Pour ce qui est du marché de la monnaie, la relation d'équilibre dite « LM » s'écrit :

$$M = M^D \qquad [3]$$

où M représente l'offre de monnaie (exogène) et M^D, la demande de monnaie ; en outre on suppose que M^D=$L(Y, i)$, où $L(\cdot)$, la fonction de demande de monnaie est telle que $L'_Y(Y,i) > 0$ et $L'_i(Y, i) <0$.

Questions

1. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle permet(tent) de considérer que toute variation nominale correspond à une variation réelle ?

2. Ecrivez la relation d'équilibre dite « IS » du modèle (en ayant pris soin, au préalable, de distinguer l'identité comptable – ou les identités comptables – et les hypothèses de comportement que vous utilisez pour écrire cette relation).

3. Quelles sont les justifications théoriques du caractère croissant de la demande de monnaie par rapport au revenu et de son caractère décroissant par rapport au taux d'intérêt ?

4. On suppose les spécifications suivantes pour la fonction :

- de consommation : $C = c(Y\text{-}T)$, avec $0< c <1$;
- d'investissement : $I = -bi$, avec $0 < b <1$;
- de demande de monnaie : $M^D=l_1Y - l_2i$, avec $0 < l_1 < 1$ et $0 < l_2 < 1$

Déterminez l'expression du couple d'équilibre (Y^*, i^*) du modèle.

5. Déterminez l'effet d'une augmentation des dépenses publiques (financée par emprunt) sur l'équilibre global du modèle en indiquant l'expression des multiplicateurs ainsi que leur signe.

6. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle permet(tent) de dire que lorsque la demande globale augmente, le produit et donc le revenu global augmentent ?

Questions (6 points)

1. Rappelez la définition d'un monopole naturel et expliquez en quoi, et selon quelles modalités, l'intervention de l'Etat s'avère alors nécessaire. (2 points)

2. La courbe de Phillips : définition, enjeux et critiques. (4 points)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Remarque* : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires.**

Une entreprise fait un chiffre d'affaires de 2.565.000 euros réparti selon 176 factures, dont le tableau suivant présente la répartition en 7 classes. Chaque classe *i* étant caractérisée par son centre x_i.

i	Classes	x_i	n_i	$n_i x_i$
1	(0 ; 15000(	7500	139	1042500
2	(15000 ; 30000(	22500	12	270000
3	(30000 ; 45000(	37500	16	600000
4	(45000 ; 60000(	52500	3	157500
5	(60000 ; 75000(	67500	2	135000
6	(75000 ; 90000(	82500	2	165000
7	(90000 ; 105000(	97500	2	195000
			176	2565000

Question 1

Calculer la moyenne de la variable X (chiffre d'affaires).

Question 2

On note m la masse totale définie par $\sum_{i=1}^{7} n_i x_i$ et n le nombre total de factures défini par $\sum_{i=1}^{7} n_i$. Calculer les effectifs cumulés α_k (en %) et les masses cumulées β_k (en %) définis par :

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $\quad \alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n}$ et $\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{m}$

Interprétation : pour $k \geq 1$, α_k est le pourcentage de factures comprises entre (x_k –7500) euros et (x_k + 7500) euros . Ces factures représentent une fraction du chiffre d'affaires égale à β_k.

Question 3

Reporter les points M_k (α_k, β_k) pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sur un graphique et on appelera courbe de Lorentz la ligne brisée des segments $[M_k, M_{k+1}]$.

Tracer sur le même graphique la droite y = x

Question 4

a) Calculer la surface notée a de la région comprise entre la droite y = x et la courbe de Lorentz en appliquant la formule :

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{6} n_{i+1}(\beta_i + \beta_{i+1}) \text{ avec } \beta_0 = 0$$

b) Calculer l'indice de concentration, appelé indice de Gini, $g = 2a$.

c) Commenter.

Question 5

Pour tout groupe d'individus G d'effectif non nul, on définit son rapport masse sur effectif (mse) par :

$$mse(G) = \frac{masse\ (en\ pourcentage\ de\ la\ masse\ totale)\ possédée\ par\ le\ groupe\ G}{effectif\ (en\ pourcentage\ de\ l'effectif total)\ du\ groupe\ G}$$

Calculer mse pour les factures comprises entre 45000 et 60000 euros.

Question 6

On définit :

$G(\alpha) = groupe\ constitu\acute{e}\ des\ \alpha\ derniers\ individus$ (factures), α étant un pourcentage
$m\ (\alpha) = masse\ en\ pourcentage\ poss\acute{e}d\acute{e}e\ par\ le\ groupe\ des\ \alpha\ derniers\ individus$

$$mse\big(G(\alpha)\big) = \frac{m(\alpha)}{\alpha}$$

a) Calculer $mse\big(G(0{,}5)\big)$ et $mse\big(G(0{,}1)\big)$.

b) Sachant que l'on a toujours $1 \leq mse\big(G(0{,}5)\big) < 2$ et $1 \leq mse\big(G(0{,}1)\big) < 10$ et que l'on peut conclure de l'analyse de ces deux indicateurs les éléments suivants :

En terme de concentration globale :

- Si $mse\big(G(0{,}5)\big) = 1$; on dit que l'on a une répartition égalitaire (concentration nulle) ;
- Si $mse\big(G(0{,}5)\big)$ est proche de 1,5 ; on parle de concentration moyenne ;
- Si $mse\big(G(0{,}5)\big)$ est proche de 2 ; la concentration globale est maximale – les derniers 50% ont pratiquement tout.

En terme de concentration finale :

- Si $mse\big(G(0,1)\big) = 1$; on dit que l'on a une répartition égalitaire (concentration nulle) ;
- Si $mse\big(G(0,1)\big)$ est proche de 5,5 ; on parle de concentration moyenne ;
- Si $mse\big(G(0,1)\big)$ est proche de 10 ; la concentration finale est maximale – les derniers 10% ont pratiquement tout.

Commenter les résultats obtenus à la question 6.a.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si a + b = 5. Pour obtenir 5, il faut tirer 1 et 4, ou 4 et 1, ou 2 et 3, ou 3 et 2, soit 4 tirages favorables sur les 4 x 4 possibles. La probabilité que les vecteurs soient orthogonaux est donc de 1/4.

Question 2

a) $p(A_1) = ¼ \times ¾ = 3/16$; $p(B_1) = ¾ \times ¼ = 3/16$; $p(C_1) = 1 - p(A_1) - p(B_1) = 5/8$

b) $p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p(C_1)$
$p(C_{n+1}) = (5/8)^{n+1}$

c) $p(A_{n+1}) = p(C_n) \times p(A_1) = 3/16 \times (5/8)^n$

Question 3

a) 5/8 étant inférieur à 1, la limite de A_n est nulle.

b) $p(A_n)$ est inférieur ou égal à 0,01 si et seulement si $3/16 \times (5/8)^{n-1}$ est inférieur ou égal à 0,01. En poursuivant le calcul, on trouve que n doit être supérieur ou égal à 7,24. La solution pour avoir un entier est donc $n = 8$.

Exercice 2

Question 1

On a $\vec{v} = 2\vec{u}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc liée. Quel que soit le vecteur $\vec{z}$, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ restera liée.

Question 2

La famille $(\vec{u}, \vec{w})$ est libre. Le théorème de la base incomplète nous dit qu'on peut compléter la famille libre de deux vecteurs pour en faire une base de R^3. Par exemple, on prend un vecteur de la base canonique pour compléter. Ici, le vecteur $\vec{z}$ de coordonnées (1,0,0) convient.

Exercice 3

$$\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + (b^2-ab)x^4 + (-b^3+ab^2)x^6 + o(x^6)$$

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2 + (-b^2+ab+\frac{1}{24})x^4 + (b^3-ab^2-\frac{1}{720})x^6 + o(x^6)$$

Les termes d'ordres 2 et 4 disparaissent si $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$

Dans ce cas, on trouve comme partie principale de degré 6 : $\frac{1}{480}x^6$

Exercice 4

Question 1

Evident

Question 2

a) Démonstration par récurrence que les suites sont bien définies jusqu'à l'ordre n et vérifient la propriété demandée : c'est vrai au rang 0 et, en utilisant la question précédente, si c'est vrai au rang n, c'est vrai aussi au rang n+1.

b) Puisque $v_n \leq u_n$, on sait que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{u_n+u_n}{2} = u_n$$

De même, on a

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_n}+\frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{v_n}$$

Ce qui prouve que la suite u_n est décroissante et que la suite v_n est croissante.

c) La suite v_n est croissante et majorée par u_0 (car $v_n \leq u_n \leq u_0$), donc convergente vers une limite notée b_1. De même, la suite u_n est décroissante et minorée par v_0, donc convergente vers une limite notée b_2. En utilisant que $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, on a $b_2 = \frac{b_2+b_1}{2}$. Ceci prouve que b_1 est égal à b_2.

d) Soit G la moyenne géométrique de u_0 et v_0. On montre par récurrence que G est la moyenne géométrique de u_n et de v_n en utilisant la question 1 ($\sqrt{mh} = g$). Passant à la limite, on a : $\sqrt{b^2} = G$, ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 5

Question 1

a) Si la matrice est de taille 1, le résultat est évident. On suppose le résultat vrai pour toute matrice carrée de taille n-1 vérifiant les conditions de l'énoncé, et on doit le prouver pour toute matrice carrée de taille n. Soit A = ($a_{i,j}$) une telle matrice carrée. On calcule son déterminant en développant par rapport à la première colonne, et on dote D_i le déterminant obtenu en barrant la ième ligne et la première colonne. On a donc :

$$\text{Det (A)} = a_{1,1}D_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$$

Chaque D_i est un nombre entier d'après la formule qui permet de calculer le déterminant. Pour tout $i \geq 2$, $a_{i,1}$ est pair par définition et par conséquence, $a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$ est aussi un nombre pair. La somme de nombres pairs est un nombre pair et donc, $\sum_{i=2}^{n} a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$ est pair. De plus, $a_{1,1}$ est impair, et par hypothèse de récurrence D_1 aussi, donc $a_{1,1}D_1$ est impair. En réunissant tout, on obtient que Det (A) est un nombre entier impair.

b) Un entier impair est non nul, le déterminant de la matrice A est donc différent de zéro. La matrice A est inversible.

Question 2

a) Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne porte la somme des nombres de la ligne correspondante de la matrice M. Comme il y a toujours autant de moutons dans chaque troupeau, la somme vaut en regroupant les termes : 50 x 0 + 50 x 2 + 1 = 101. Les résultats sont donc la matrice à 101 lignes

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 101 \\ \vdots \\ 101 \\ 101 \end{pmatrix}$$

b) Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne i est :

$$\text{poids mouton } i + 2 \times \sum_{mouton\ dans\ B} poids\ mouton\ + 0 \times \sum_{mouton\ dans\ A} poids\ mouton$$

Ce qui fait encore : poids mouton i + 2 x poids des moutons du troupeau B.

Maintenant, soit P le poids total du troupeau de mouton vaut :

P = poids mouton i + poids des moutons dans A + poids des moutons dans B.

Comme, par hypothèse, le poids des moutons dans A est égal au poids des moutons dans B, la matrice recherchée est :

$$\begin{pmatrix} P \\ P \\ \vdots \\ P \\ P \end{pmatrix}$$

c) C'est évident en utilisant la question 1.

d) D'après les questions 2.a et 2.b, on a :

$$MX = \mu M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Où $\mu = \frac{P}{101}$. Puisque M est inversible, on obtient en multipliant par M^{-1} à gauche le résultat :

$$X = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

C'est bien que tous les moutons ont le même poids.

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

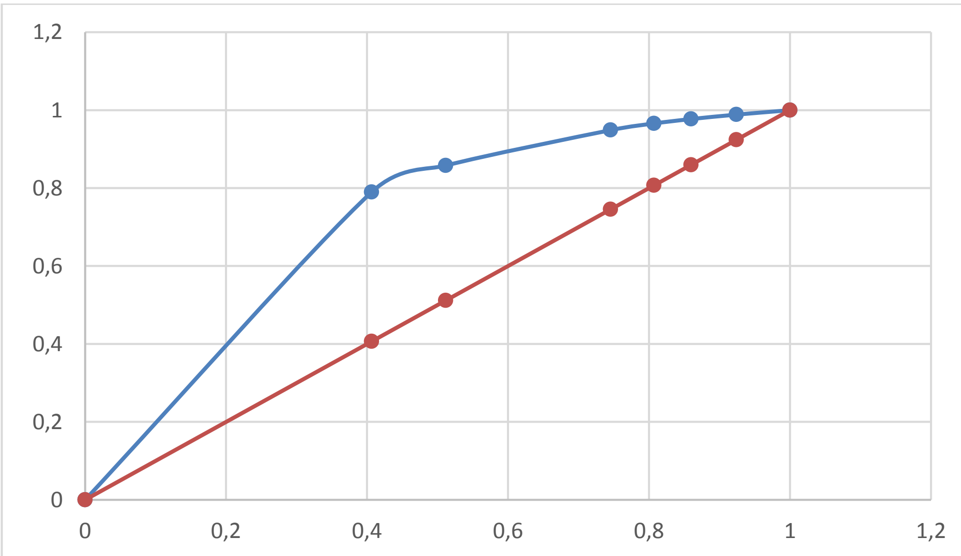
La moyenne est de 14.573,86 euros.

Question 2

α_1 = 0,7898	β_1 = 0,4064
α_2 = 0,8580	β_2 = 0,5117
α_3 = 0,9489	β_3 = 0,7456
α_4 = 0,9659	β_4 = 0,8070
α_5 = 0,9773	β_5 = 0,8596
α_6 = 0,9886	β_6 = 0,9240
α_7 = 1,0000	β_7 = 1,0000

Question 3

Graphique



Question 4

a) a = 0,2073.
b) g = 0,4146.
c) L'indice de Gini varie de 0 à 1, et plus il est proche de 1, plus on dit que la concentration de la population étudiée est forte. Ici, il est proche de 0,5 ce qui signifierait que la concentration est plutôt faible.

Question 5

mse = 157500/2565000 x 176/3 = 3,602

Les factures comprises entre 45000 et 60000 euros ont presque 4 fois plus en masse qu'en effectif. Ceci dément le commentaire de la question précédente. L'indice de Gini n'est pas toujours suffisant pour étudier la concentration.

Question 6

a) Calcul de $mse\big(G(0,5)\big)$
Les 50% dernières factures sont les 88 (176/2) factures ayant les montants les plus élevés. Il y a 37 factures d'un montant supérieur à 15000 euros. Pour trouver les (88-37) factures manquantes pour faire 50%, il faut faire une estimation (règle de trois) dans la classe des factures de 0 à 15000 euros.

$$m(0,5) = \frac{(2565000-1042500)+((88-37)*7500)}{2565000} = \frac{1905000}{2565000} = 0,743$$

On a donc : $mse\big(G(0,5)\big) = 2 * m(0,5) = 1,49$

De même, on trouve que :

$$m(0,1) = \frac{(195000+165000+135000+157500)+((17,6-9)*52500)}{2565000} = 0,430$$

On a donc : $mse\big(G(0,1)\big) = 10 * 0,430 = 4,30$

b) La concentration globale est très proche de la moyenne alors que la concentration finale est très en dessous de la moyenne.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat. Dans toute l'épreuve R désigne l'ensemble des nombres réels.**

Exercice 1

Soient $a, b \in R$ et soit f la fonction définie sur R par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & si\ \ x > 0 \\ ax + b & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b la fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b la fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a et b la fonction f est-elle de classe C^1 sur R ?

Exercice 2

On considère dans R^4 :

$v_1 = (1,3,-2,2)$ $v_2 = (2,7,-5,6)$ $v_3 = (1,2,-1,0)$

$w_1 = (1,3,0,2)$ $w_2 = (2,7,-3,6)$ $w_3 = (1,1,6,-2)$

Soit F le sous-espace vectoriel de R^4 engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. Montrer que v_3 est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire une base de F.
2. Montrer que w_3 est une combinaison linéaire de w_1 et w_2. En déduire une base de G.
3. Montrer que la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$.
4. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^3 ; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E.
5. Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Donner la dimension de $F \cap G$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire, pour tout n entier naturel, que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, est croissante.
4. Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que la suite (w_n) converge vers $l(1-l)$.

6. Soit (t_n) une autre suite telle que, pour $n \geq n_0$, on a
$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n} \text{ avec a} > 0$$
Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$ puis que la suite (t_n) est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.

Exercice 4

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que cette matrice est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. En déduire la valeur de A^n pour tout n entier naturel.

Exercice 5

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité de 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Donner la probabilité que l'erreur 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ème lecture.
2. Donner la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ème lecture.
3. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité obtenue à la question précédente soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 6

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses à chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Donner la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le multilinguisme en Afrique, un atout ou un frein ?

Sujet n° 2

L'art est-il universel ?

Sujet n° 3

«De nos jours, la parole est devenue flottante tout comme les devises.»
Explicitez cette citation de Driss Chraibi, écrivain marocain.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n° 1

Le niveau de l'emploi et du chômage se déterminent-ils sur le marché du travail ?

Sujet n° 2

Microéconomie (8 points)

Remarque : tous les résultats doivent être justifiés et soigneusement interprétés.

Soit un producteur en situation de concurrence parfaite et dont la fonction de production est donnée par :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/2} \ q_2^{1/3} = q$$

où q_1 et q_2 sont les quantités de facteurs 1 et 2, et q la quantité produite.

1. Existe-t-il des hypothèses particulières que doivent respecter les productivités marginales et les rendements d'échelle dans le modèle de concurrence parfaite? (0.5)

2. Quelle est la nature des rendements d'échelle ? (0.5)

3. Donnez le taux marginal de substitution technique. Interprétez. Comment varie-t-il avec q_1 ? Que cela signifie-t-il ? (1)

4. Soit p, le prix du bien produit, et $p_1 = 6$ et $p_2 = 4$, les prix respectifs de facteurs 1 et 2. Donnez alors les fonctions de demande de facteurs optimales. (2)

5. Calculez la fonction d'offre. Interprétez et expliquez sa forme. (1)

6. Expliquez sans calcul ce qui se passe sur les demandes et l'offre si p_2 augmente, toute chose égale par ailleurs ? Comment s'adapte le producteur ? Même question si p baisse, toute chose égale par ailleurs ? Distinguez alors en termes d'interprétation ce que signifient un déplacement le long d'une courbe d'offre et un déplacement de la courbe d'offre. (2)

7. Est-on ici en équilibre général ou en équilibre partiel ? (0.5)

8. Comment se traduit, en termes d'hypothèse implicite dans l'exercice, le fait que le producteur est en concurrence parfaite ? (0.5)

Macroéconomie (6 points)

Remarque : tous les résultats doivent être justifiés et soigneusement interprétés.

Soit une économie sans échange avec le reste du monde dans laquelle prévaut une situation de sous-emploi des capacités de production et où les prix sont fixes. On distingue trois secteurs dans cette économie : celui des biens et services, celui des titres et celui de la monnaie. La production de cette économie, ainsi que sa contrepartie en termes de revenu global (pour la période considérée), sont notées Y. La part du produit global consommée par les ménages est notée C, celle « consommée » par les entreprises, I et celle « consommée » par l'Etat, G. Par ailleurs, on note S, la part du revenu des ménages non consommée et T, les impôts prélevés par l'Etat (tous ces agrégats étant définis pour la période considérée).

1. Ecrivez les identités comptables caractérisant cette économie. (0.5)

2. Si cette économie avait été ouverte, quelles auraient été les identités comptables la caractérisant (en notant X, la part du produit de cette économie exportée vers le reste du monde et IM, les importations de cette économie durant la période considérée) ? Précisez ce que recouvrent alors les différents agrégats considérés. (0,5)

3. En supposant que la consommation des ménages est déterminée par leur revenu disponible $Y_d = Y – T$ selon la fonction de consommation $C = cY_d$ (avec $0 < c < 1$) et que l'investissement des entreprises est déterminé par le taux d'intérêt i selon la fonction d'investissement $I = – bi$ (où $0 < b$) :
3.1. Ecrivez la relation d'équilibre IS caractérisant la compatibilité des décisions des ménages et des entreprises concernant les biens et services. (0.5)
3.2. Déterminez l'expression du multiplicateur budgétaire simple. (0,5)

4. En supposant que la demande de monnaie, notée M^d, est déterminée par le revenu global Y et le taux d'intérêt i selon la relation $M^d = l_1Y – l_2i$ (où $0 < l_i < 1$, i =1,2), et qu'elle est confrontée à « l'offre » de monnaie, notée M^S, fixée par les autorités

monétaires, écrivez la relation d'équilibre *LM* caractérisant la compatibilité des décisions des agents concernant la monnaie. (0,5)

5. Déterminez l'équilibre global de cette économie, *i.e.* le taux d'intérêt et le revenu global assurant la compatibilité des décisions des agents dans l'ensemble des secteurs de l'économie (en expliquant au passage pourquoi il est inutile de prendre en compte la relation d'équilibre du marché des titres). (1.5)

6. Déterminez le multiplicateur de dépenses publiques pour le revenu et le taux d'intérêt d'équilibre. (1)

7. Exhibez l'expression du frein monétaire. A quelle hypothèse du modèle tient l'existence de ce frein ? (1)

Questions (6 points)

1. Après avoir rappelé la définition d'une externalité, expliquez en quoi leur présence pose problème ? Rappelez succinctement quelles sont les solutions envisageables ? (1.5)

2. Qu'est-ce que la théorie du revenu permanent ? A quoi s'oppose-t-elle ? (3)

3. Quelle est l'influence, en termes d'effet de substitution et d'effet de revenu, d'une hausse de salaire sur l'offre de travail d'un consommateur ? Comment finalement suppose-t-on que varie cette offre avec le salaire ? (1.5)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Remarque* : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires.**

Attention : le tableau de synthèse joint (Tableau 3 - récapitulatif de certains résultats numériques) doit être impérativement rendu avec votre copie.

On veut étudier les évolutions démographiques des pays du continent africain et les rapprocher des évolutions du PIB. Pour ce faire, on a défini les 5 zones ci-dessous :

- Afrique Australe
- Afrique Centrale
- Afrique de l'Est
- Afrique du Nord
- Afrique de l'Ouest

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Partie I - Evolution démographique

Le tableau 1 donne le nombre d'habitants par pays et par zone en millions d'habitants pour les années 1960, 1970, 1980, 1990, 2000, 2010 et 2014.

1) Pour chacune des zones définies précédemment, calculer le taux moyen annuel de croissance de la population entre 1960 et 2000. Reporter les résultats dans le tableau de synthèse (tableau 3).

2) Dans cette question, on ne s'intéresse qu'à une seule zone : la zone « Afrique du Nord ».

a) En supposant que l'évolution annuelle de 2000 à l'an 2014 sera identique à celle qui vient d'être calculée à la question précédente, donner le nombre d'habitants en l'an 2014 de cette zone.
b) Comparer cette estimation avec les données réelles de population figurant dans le tableau 1. Commenter cet écart.
c) A partir des conclusions que vous avez faites à la question précédente, donner, en la justifiant, une estimation de la population de la zone « Afrique du Nord » pour 2050 (précision : un résultat sans explication de la méthode employée ne sera pas pris en compte par le correcteur).

3) En supposant que l'évolution annuelle constatée entre 2000 et 2014 se prolonge, donner l'année pour laquelle la population africaine devrait dépasser les 2 milliards d'individus.

Partie II - Evolution du PIB

Dans cette seconde partie, on veut avoir des données 2014 sur le *PIB* pour tous les pays africains, pour calculer des PIB pour chaque zone et pour l'ensemble « Afrique ».

Le tableau 2 donne le *PIB* (produit intérieur brut) par pays et par zone pour les années 1960, 1970, 1980, 1990, 2000, 2010 et 2014. Le *PIB* est exprimé en dollars US constants de l'année 2005. Il mesure la richesse dans le pays pendant l'année, en additionnant la valeur ajoutée dans les différentes branches. Il est exprimé en milliards de dollars. Pour l'année 2014, vous constaterez qu'il manque les données *PIB* de 3 pays : Somalie, Soudan du sud, Tunisie. Nous ne pouvons donc calculer le PIB des zones incluant un de ces trois pays. Il vous est proposé d'estimer les PIB manquants en répondant aux questions suivantes.

1) En partant de l'hypothèse que le PIB par habitant en Somalie en 2014 est le même que celui d'un habitant de la zone « Afrique de l'Est », donner une estimation du PIB de ce pays pour 2014.

2) En partant de l'hypothèse que le PIB par habitant du Soudan du sud en 2014 est le même que celui d'un habitant du Soudan pour 2014, donner une estimation du PIB de ce pays pour 2014.

3) Pour la Tunisie, nous disposons des données pour les dernières années. Elles figurent ci-dessous.

Année	2010	2011	2012	2013
PIB (en milliards de $ constants de 2005)	40,58	40,37	42,26	43,32

En partant de l'hypothèse où l'évolution moyenne annuelle entre 2010 et 2013 se prolonge entre 2013 et 2014, donner une estimation du PIB de ce pays pour 2014.

4) A partir des résultats obtenus aux questions précédentes, donner une estimation du PIB des deux zones concernées. Reporter les résultats dans le tableau de synthèse (tableau 3) et donner le *PIB* pour l'ensemble « Afrique ».

Partie III - Evolution du PIB/Habitant

Dans cette dernière partie, on souhaite commenter l'indicateur "PIB/Habitant".

1) Calculer pour l'année 2014, l'indicateur "PIB/Habitant" pour chacune des 5 zones précédemment définies, en partant des chiffres réels de population et des PIB donnés dans le tableau 2 ou obtenus dans la seconde partie. Reporter les résultats dans le tableau de synthèse (tableau 3), y compris pour l'ensemble « Afrique ».

2) Commenter les chiffres obtenus en moins de 5 lignes en faisant ressortir au moins deux points importants.

Tableau 1 - Données Population

Population (en millions)	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2014
Afrique du Sud	17,40	22,09	27,58	35,20	44,00	50,79	54,00
Botswana	0,52	0,69	1,00	1,38	1,74	2,05	2,22
Lesotho	0,85	1,03	1,31	1,60	1,86	2,01	2,11
Namibie	0,60	0,78	1,01	1,42	1,90	2,19	2,40
Swaziland	0,35	0,45	0,60	0,86	1,06	1,19	1,27
Afrique Australe	**19,72**	**25,04**	**31,50**	**40,46**	**50,56**	**58,23**	**62,00**
Angola	5,27	6,30	8,21	11,13	15,06	21,22	24,23
Cameroun	5,36	6,77	8,93	12,07	15,93	20,59	22,77
Congo, République démocratique du	15,25	20,01	26,36	34,96	48,05	65,94	74,88
Congo, République du	1,01	1,34	1,80	2,39	3,11	4,07	4,50
Gabon	0,50	0,59	0,73	0,95	1,23	1,54	1,69
Guinée équatoriale	0,25	0,29	0,22	0,38	0,53	0,73	0,82
République centrafricaine	1,50	1,83	2,27	2,94	3,73	4,44	4,80
Sao Tomé-et-Principe	0,06	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17	0,19
Tchad	3,00	3,64	4,51	5,96	8,34	11,90	13,59
Afrique Centrale	**32,20**	**40,84**	**53,12**	**70,89**	**96,12**	**130,60**	**147,47**
Burundi	2,79	3,46	4,13	5,61	6,77	9,46	10,82
Comores	0,19	0,23	0,31	0,42	0,55	0,70	0,77
Djibouti	0,08	0,16	0,36	0,59	0,72	0,83	0,88
Érythrée	1,41	1,81	2,38	3,14	3,54	4,69	5,11
Éthiopie	22,15	28,41	35,24	48,06	66,44	87,56	96,96
Kenya	8,11	11,25	16,27	23,45	31,07	40,33	44,86
Madagascar	5,10	6,58	8,75	11,55	15,74	21,08	23,57
Malawi	3,62	4,60	6,16	9,41	11,19	14,77	16,70
Maurice	0,66	0,83	0,97	1,06	1,19	1,25	1,26
Mozambique	7,49	9,26	11,94	13,37	18,26	24,32	27,22
Ouganda	6,79	9,45	12,55	17,38	23,76	33,15	37,78
Rwanda	2,93	3,75	5,14	7,26	8,02	10,29	11,34
Seychelles	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,09
Somalie	2,76	3,45	6,09	6,32	7,39	9,58	10,52
Soudan du Sud	2,96	3,65	4,70	5,76	6,69	10,06	11,91
Tanzanie	10,07	13,61	18,68	25,46	33,99	45,65	51,82
Zambie	3,05	4,19	5,93	8,14	10,59	13,92	15,72
Zimbabwe	3,75	5,21	7,29	10,48	12,50	13,97	15,25
Afrique de l'Est	**83,95**	**109,95**	**146,95**	**197,53**	**258,49**	**341,70**	**382,58**
Algérie	11,12	14,55	19,34	25,91	31,18	36,04	38,93
Égypte, République arabe d'	27,07	34,81	43,37	56,40	68,33	82,04	89,58
Libye	1,43	2,11	3,19	4,40	5,34	6,27	6,26
Maroc	12,33	16,04	20,07	24,95	28,95	32,11	33,92
Mauritanie	0,86	1,15	1,53	2,02	2,71	3,59	3,97
Soudan	7,53	10,23	14,42	20,01	28,08	36,11	39,35
Tunisie	4,22	5,13	6,38	8,15	9,55	10,55	11,00
Afrique du Nord	**64,56**	**84,02**	**108,30**	**141,84**	**174,14**	**206,71**	**223,01**
Bénin	2,43	2,91	3,72	5,00	6,95	9,51	10,60
Burkina Faso	4,83	5,62	6,82	8,81	11,61	15,63	17,59
Cabo Verde	0,20	0,27	0,29	0,34	0,44	0,49	0,51
Côte d'Ivoire	3,47	5,24	8,27	12,17	16,52	20,13	22,16
Gambie	0,37	0,45	0,60	0,92	1,23	1,69	1,93
Ghana	6,65	8,60	10,80	14,63	18,82	24,32	26,79
Guinée	3,58	4,22	4,51	6,03	8,80	11,01	12,28
Guinée-Bissau	0,62	0,71	0,85	1,06	1,32	1,63	1,80
Libéria	1,12	1,42	1,89	2,10	2,89	3,96	4,40
Mali	5,26	5,95	7,09	8,48	11,05	15,17	17,09
Niger	3,40	4,50	5,96	7,91	11,22	16,29	19,11
Nigéria	45,21	56,13	73,70	95,62	122,88	159,42	177,48
Sénégal	3,18	4,22	5,57	7,51	9,86	12,96	14,67
Sierra Leone	2,18	2,51	3,09	3,93	4,06	5,78	6,32
Togo	1,58	2,12	2,72	3,79	4,87	6,39	7,12
Afrique de l'Ouest	**84,08**	**104,87**	**135,88**	**178,30**	**232,52**	**304,38**	**339,85**
Total Afrique	**284,51**	**364,72**	**475,75**	**629,02**	**811,83**	**1 041,62**	**1 154,91**

Tableau 2 - Données PIB

PIB	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2014
(en milliards de $ constants de 2005)							
Afrique du Sud	61,64	110,24	153,56	178,40	213,59	300,21	328,68
Botswana	0,20	0,45	1,84	5,16	8,31	12,41	15,75
Lesotho	0,17	0,28	0,56	0,82	1,19	1,76	2,05
Namibie			3,54	3,98	5,71	9,04	10,98
Swaziland		0,39	0,72	1,74	2,33	2,91	3,20
Afrique Australe			**160,22**	**190,10**	**231,13**	**326,34**	**360,67**
Angola				15,99	17,25	50,37	61,08
Cameroun	3,78	4,63	8,70	12,07	13,83	19,15	23,31
Congo, République démocratique du	11,51	15,51	16,17	17,66	9,93	15,67	21,23
Congo, République du	0,97	1,46	2,70	4,33	4,99	7,85	9,29
Gabon	1,52	2,95	6,16	7,36	8,68	9,99	12,31
Guinée équatoriale			0,11	0,15	2,29	9,01	9,01
République centrafricaine	0,72	0,87	0,99	1,10	1,23	1,57	1,09
Sao Tomé-et-Principe					0,10	0,17	0,20
Tchad	1,65	1,83	1,46	2,44	3,05	8,43	10,41
Afrique Centrale					**61,35**	**122,20**	**147,93**
Burundi	0,41	0,63	0,79	1,22	1,00	1,39	1,65
Comores			0,21	0,28	0,31	0,41	0,46
Djibouti				0,73	0,61	0,91	1,09
Érythrée					0,97	1,06	1,27
Éthiopie				6,92	9,08	20,78	30,50
Kenya	2,61	4,05	8,74	13,02	15,67	23,93	29,55
Madagascar	2,42	3,26	3,60	3,79	4,50	5,80	6,39
Malawi	0,50	0,79	1,44	1,79	2,51	3,87	4,58
Maurice			1,79	3,22	5,41	7,83	8,97
Mozambique			2,50	2,54	4,31	9,02	11,95
Ouganda				3,47	6,52	13,27	16,41
Rwanda	0,65	0,84	1,42	1,74	1,80	3,85	5,05
Seychelles	0,14	0,22	0,45	0,62	0,93	1,14	1,43
Somalie							
Soudan du Sud							
Tanzanie				8,86	11,95	22,74	29,60
Zambie	2,87	4,12	4,72	5,23	6,17	12,65	16,24
Zimbabwe	1,84	3,39	4,61	7,10	8,45	5,20	6,94
Afrique de l'Est							
Algérie	19,91	28,43	50,82	66,77	78,90	116,51	132,41
Égypte, République arabe d’		15,36	29,08	49,53	75,40	121,02	131,41
Libye					36,84	57,35	29,21
Maroc		13,53	22,46	35,27	46,69	75,52	87,14
Mauritanie	0,44	0,96	1,13	1,33	1,74	2,80	3,48
Soudan	5,32	6,26	8,86	11,32	19,45	37,49	38,27
Tunisie		5,74	11,68	16,58	26,35	40,58	
Afrique du Nord					**285,37**	**451,28**	
Bénin	0,96	1,28	1,67	2,29	3,56	5,23	6,34
Burkina Faso	0,92	1,22	1,69	2,39	4,01	7,35	9,25
Cabo Verde			0,15	0,25	0,74	1,29	1,41
Côte d'Ivoire	3,29	7,58	12,67	13,61	17,08	19,06	24,02
Gambie		0,17	0,27	0,39	0,54	0,78	0,83
Ghana	3,20	4,30	4,45	5,51	8,39	14,71	20,50
Guinée				1,72	2,52	3,27	3,60
Guinée-Bissau		0,28	0,31	0,51	0,54	0,69	0,76
Libéria	0,85	1,37	1,64	0,51	0,67	0,77	0,98
Mali		1,67	2,47	2,63	3,90	6,97	7,81
Niger	1,59	2,09	2,37	2,35	2,80	4,38	5,60
Nigéria	25,28	38,98	61,95	56,42	67,85	159,02	194,88
Sénégal	2,77	3,35	3,96	5,12	6,93	10,37	11,77
Sierra Leone	0,71	1,08	1,35	1,48	1,14	2,13	3,34
Togo	0,43	0,96	1,45	1,61	2,00	2,48	3,06
Afrique de l'Ouest				**96,78**	**122,70**	**238,50**	**294,15**
Total Afrique							

Tableau 3 - Tableau de synthèse

(A rendre impérativement avec sa copie)

Synthèse	Partie I	Partie II	Partie III
	Question 1	Question 4	Question 1
		An 2014	An 2014
	Tx Croissance (en %)	PIB (en milliards de $)	PIB/Hab (en $)
Afrique Australe		360,67	
Afrique Centrale		147,93	
Afrique de l'Est			
Afrique du Nord			
Afrique de l'Ouest		294,15	
Total Afrique			

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. La fonction *f* est continue en 0 si et seulement si *f* admet une limite à droite en 0, une limite à gauche en 0, et si ces deux limitent coïncident.
   $\lim_{x \to 0^-} f(x) = b$
   Un développement limité de la fonction *f* en 0 est $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ = $-\frac{1}{2} + o(1)$, donc
   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$
   La fonction *f* est donc continue en 0 si et seulement si *b* = -1/2 et *a* un réel quelconque

2. Pour que la fonction *f* soit dérivable, il faut déjà qu'elle soit continue. D'après la question précédente, il est nécessaire que *b* = -1/2.
   Pour la dérivabilité, il faut étudier la continuité de la fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ en 0. La limite à gauche de la fonction *g* est égale à *a.*
   La limite à droite de la fonction *g* est égale, en effectuant un développement limité, à 1/3
   La fonction *f* est donc dérivable en 0 si et seulement si *b* = -1/2 et *a* = 1/3

3. Pour que la fonction *f* soit de classe C^1, il faut qu'elle soit dérivable en 0. D'après la question précédente, il est donc nécessaire que *b* = -1/2 et *a* = 1/3. Il faut en outre vérifier que f' est continue en 0.
   $$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - x - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3}$$
   En faisant un développement limité de cette fonction, on obtient une limite en 0 égale à 1/3, ce qui est aussi le résultat obtenu à la question précédente. Ceci montre bien la continuité de la fonction f'

Exercice 2

1. On a $v_3 = 3v_1 - v_2$. Ainsi, *F* est engendré par v_1 et v_2. Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de *F*. C'est donc une base de *F*.

2. On a $w_3 = 5w_1 - 2w_2$. Ainsi, *G* est engendré par w_1 et w_2. Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de *G*. C'est donc une base de *G*.

3. Comme $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$, la famille composée des 4 vecteurs est liée. On sait que ces 4 vecteurs forment une famille génératrice de *F + G.* Comme w_2 est une combinaison linéaire des 3 autres, ces 4 vecteurs ne forment pas une base de *F + G*. En revanche, on démontre facilement que les 3 vecteurs (v_1, v_2, w_1) forment une famille libre. C'est donc une base de *F + G.*

4. Une famille génératrice de *E* est ((1,0,0,-4),(0,1,0,2),(0,0,1,0)). On démontre facilement que ces 3 vecteurs forment une famille libre. C'est donc une base de *E*.

5. On remarque que dim $(F + G)$ = dim E = 3. Pour montrer que $F + G = E$, il suffit de montrer que $F + G$ est inclus dans E. Comme $F + G$ est engendré par (v_1, v_2, w_1), il suffit de démontrer que ces 3 vecteurs sont éléments de E. Cette démonstration est immédiate et non faite ici.
La somme n'est pas directe car on devrait avoir dim E = dim F + dim G. Or, ce n'est pas le cas $(3 \neq 2 + 2)$. Comme dim $(F + G)$ = dim F + dim G – dim $(F \cap G)$, on obtient dim $(F \cap G) = 1$.

Exercice 3

1. On dérive f : $f'(x) = 1 - 2x$, fonction qui s'annule en $1/2$, positive sur $]-\infty, 1/2]$, négative sur $[1/2, +\infty[$. Ainsi f est croissante sur $]-\infty, 1/2]$, décroissante sur $[1/2, +\infty[$, et $f(1/2) = 1/4$. On obtient une parabole concave.

2. Démonstration par récurrence : on remarque que le résultat est vrai pour $n = 0$. Il est aussi vrai pour $n = 1$. En effet si $u_0 \in]0,1[$, d'après l'étude des variations de f, $u_1 = f(u_0)$ est dans l'intervalle $]0,1/4]$. Supposons le résultat vrai au rang n , et prouvons le au rang $n + 1$.

   Puisque $u_n \in \left]0, \frac{1}{n+1}\right] \subset]0,1/2]$ et que la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle, on obtient :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \rightarrow f(0) = 0 < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

   Pour conclure on remarque que :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)} < 0$$

   Ainsi on a bien :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

3. On calcule $v_{n+1} - v_n$ et on trouve :

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$$

$$= u_n(1 - (n+1)u_n).$$

   Or comme $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$: on a $u_n > 0$ et $1 - (n+1)u_n > 0$, et donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est donc croissante.

4. Puisque v_n est croissante, il suffit de prouver qu'elle est majorée pour démontrer qu'elle est convergente. Mais, en utilisant la question précédente, $v_n = nu_n \leq \frac{n}{n+1}$. Ainsi, $v_n \leq 1$ et la suite (v_n) est donc convergente vers une limite notée l. De plus, pour tout $n > 1$, on a $v_1 \leq v_n \leq 1$. Par passage à la limite, on en déduit que $v_1 \leq l \leq 1$. Il suffit enfin de remarquer que $v_1 > 0$.

5. On va exprimer w_n en fonction de v_n et de u_n puisqu'on sait que ces deux suites convergent. On a :

$$w_n = n(v_{n+1} - v_n) = nu_n(1 - (n+1)u_n)$$

   D'après le calcul fait à la question précédente, soit :

$$w_n = v_n(1 - nu_n - u_n) = v_n(1 - v_n - u_n).$$

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, que la suite (v_n) converge vers l, on en déduit, par les opérations usuelles sur les suites convergentes, que la suite (w_n) est convergente vers $l(1-l-0)=l(1-l)$.

6. Pour $n \geq n_0$ on écrit :

$$t_{2n}-t_n=(t_{2n}-t_{2n-1})+(t_{2n-1}-t_{2n-2})+\cdots+(t_{n+1}-t_n)$$
$$\geq \frac{a}{2n-1}+\frac{a}{2n-2}+\cdots+\frac{a}{n}$$
$$\geq \frac{a}{2n}+\frac{a}{2n}+\cdots+\frac{a}{2n}$$
$$\geq \frac{a}{2}$$

Si la suite (t_n) était convergente de limite r, la suite (t_{2n}) serait convergente de même limite et on aurait $0=r-r\geq \frac{a}{2}>0$ ce qui est absurde donc (t_n) est divergente.

7. Supposons $l\neq 1$. Alors $l(1-l)$ est strictement positif (puisque $l\in]0,1]$). Posons $a=l(1-l)/2$ de sorte que $a<l(1-l)$. Puisque la suite (w_n) converge vers $l(1-l)>a>0$, il existe un entier n_0 tel que pour $n\geq n_0$, on a :

$$w_n>a\rightarrow v_{n+1}-v_n\geq \frac{a}{n}$$

Ainsi par la question précédente, on sait que (v_n) diverge. Or, ce n'est pas le cas. L'hypothèse de départ est donc fausse et la suite (v_n) converge vers 1.

Exercice 4

1. Le polynôme caractéristique est $(2-x)(4-x)^{2}$. 2 et 4 sont donc les valeurs propres. Pour la valeur propre 4, il faut s'assurer que le sous-espace propre associé soit bien de dimension 2 pour dire que la matrice est diagonalisable.
Pour la valeur propre 2, le sous-espace propre est engendré par le vecteur (1,-2,1)
Pour la valeur propre 4, le sous-espace propre est engendré par les vecteurs (0,1,0) et (1,0,-1). Ils forment une famille libre donc une base de ce sous-espace.

La matrice A est donc bien diagonalisable et on a $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

2. On sait que $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$D^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&4^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}\ et\ P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-2&-2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^n+4^n&0&2^n-4^n\\2(4^n-2^n)&2.4^n&2(4^n-2^n)\\2^n-4^n&0&2^n+4^n\end{pmatrix}$$

Exercice 5

1. On note A_i l'évènement « l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée à l'issue de la i-ème relecture ». Les évènements A_i sont indépendants et $P(A_i)=2/3$. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement $A_1\cap A_2\cap \ldots\cap A_n$.
$P(A_1\cap A_2\cap \ldots\cap A_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{3}=\ 2^n/3^n$

2. On note B_j l'évènement « l'erreur numéro j n'est pas corrigée à l'issue de la n-ème relecture ». D'après la question précédente, on $P(B_j)=2^n/3^n$ pour j = 1,2,3,4. Le livre est entièrement corrigé après la n-ème relecture si l'évènement $\bigcap_{j=1}^{4}\overline{B_j}$ est réalisé. Les évènements B_j étant

indépendants, le livre est entièrement corrigé après n relectures avec une probabilité valant $= \prod_{j=1}^{4}(1 - \frac{2^n}{3^n}) = (1 - \frac{2^n}{3^n})^4$

3. La probabilité calculée à la question précédente est supérieure à 0,9 si et seulement si $n \geq \frac{\ln(1-0{,}9^{(\frac{1}{4})})}{\ln(\frac{2}{3})}$, ce qui donne $n \geq 10$

Exercice 6

On note B l'évènement « l'étudiant donne la bonne réponse » et C l'évènement « l'étudiant connait la bonne réponse ». On cherche $P_B(C)$.

On connait $P(C) = p$, $P(B \text{ sachant } C) = 1$, $P(B \text{ sachant } \overline{C}) = 1/m$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(C)P(B\ sachant\ C) + P(\overline{C})P(B\ sachant\ \overline{C}) = \frac{(m-1)p+1}{m}$$

D'après la formule de Bayes, la probabilité cherchée est :

$$P(C\ sachant\ B) = \frac{P(B\ sachant\ C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}$$

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

Dans cette épreuve, une partie des calculs étaient à remettre dans le tableau 3 joint en annexe à l'énoncé. Ce tableau récapitulatif rempli est ci-dessous :

Synthèse	Partie I	Partie II	Partie III
	Question 1	Question 4	Question 1
		An 2014	An 2014
	Tx Croissance (en %)	PIB (en milliards de $)	PIB/Hab (en $)
Afrique Australe	2,38%	360,67	5 817
Afrique Centrale	2,77%	147,93	1 003
Afrique de l'Est	2,85%	188,69	493
Afrique du Nord	2,51%	466,19	2 090
Afrique de l'Ouest	2,58%	294,15	866
Total Afrique	2,66%	1 457,62	1 262

Partie I

1) Pour calculer les chiffres de la première colonne, il fallait utiliser la formule :

Population 2000 = (1+taux de croissance)$^{2000-1960}$ x Population 1960

Les chiffres de population des années 1960 et 2000 sont donnés dans le tableau 1 de l'énoncé, chiffres exprimés en millions

2-a) Pour calculer le chiffre demandé, il fallait utiliser la formule :

Population 2014 = (1+taux de croissance précédemment trouvé pour la zone Afrique du Nord)$^{2014-2000}$ x Population 2000 = 292,48

2-b) L'écart est très important : 223,01 constaté contre 292,48 estimé. Trois effets peuvent intervenir sur les chiffres de population : une baisse de la natalité, une hausse de la mortalité, l'effet migratoire

2-c) Pas de corrigé type pour cette question. Par exemple, on aurait pu constater que le taux moyen d'évolution de la population sur cette zone entre 2000 et 2014 est de 1,78%, en baisse nette par rapport à celui calculé à la question 1 (2,51%). Si on prend ce taux, on obtient une population en 2050 = population 2014 x $(1+0{,}0178)^{2050-2014}$ = 420,89 millions d'habitants

3) L'évolution constatée entre 2000 et 2014 est de 2,61% par an. Il faut résoudre l'équation suivante : 2 milliards = population 2014 x $(1+0{,}0261)^n$. On trouve n = 21,31, soit 22 ans. C'est donc en 2036 que la population africaine devrait dépasser les 2 milliards d'individus.

Partie II

1) On calcule le PIB et le nombre d'habitants de la zone « Afrique de l'Est » en ne prenant pas en compte la Somalie et le Soudan du sud. On obtient 172,07 milliards de $ pour une population de 360,15 millions d'habitants, soit un PIB par habitant de 478 $.
   Pour calculer le PIB de la Somalie, on multiplie ce chiffre à la population 2014, soit 478 x 10,52 = 5,03 milliards de $.
2) Le PIB du Soudan est de 38,27 milliards de $ en 2014 pour une population de 39,35 millions d'habitants, soit un PIB par habitant de 973 $.
   Pour calculer le PIB du Soudan du Sud, on multiplie ce chiffre à la population 2014, soit 973 x 11,91 = 11,59 milliards de $.
3) L'évolution moyenne annuelle constatée entre 2010 et 2013 est de 2,20%. Pour calculer le PIB de la Tunisie, on part du PIB de l'année 2013 que l'on fait évoluer de ce taux, soit 43,32 x (1+0,022) = 44,27 milliards de $.
4) Le PIB de la zone « Afrique de l'Est » est donc la somme de 172,07 milliards de $ + le résultat de la question 1 + le résultat de la question 2 = 188,69 milliards de $.
   Le PIB de la zone « Afrique du Nord » est donc la somme de 421,92 milliards de $ + le résultat de la question 3 = 466,19 milliard de $.
   Le PIB de la zone « Afrique » est de 1457,62 milliards de $.

Partie III

1) Pour calculer les chiffres de la troisième colonne du tableau de synthèse, il fallait utiliser la formule :

Indicateur = PIB 2014 / Population 2014. Il fallait l'exprimer en $.

2) En ce qui concerne le commentaire, il n'y a pas de corrigé type. On pouvait observer qu'il y avait des disparités importantes entre les zones avec un écart de de 1 à 12 et que la zone « Afrique Australe » était de loin la plus « riche ».

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Remarque* : Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre choisi par le candidat.**
$\mathbb{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels.*

Exercice 1

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

a) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

b) $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^+$

c) $u_n = (\frac{(n-x)}{(n+x)})^n$.

Exercice 2

Soients F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$définis par :

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$.

a) Donner une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.

b) Donner une base de $F \cap G$ et donner sa dimension.

c) Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base de F trouvée précédemment et des vecteurs de la base G trouvée précédemment est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

d) Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = {}^1/_x$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

$g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$.

a) Démontrer que g est une fonction positive.

b) Démontrer que f est une fonction de classe C^1. Que vaut $f'(0)$?

c) Vérifier que $f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$. En déduire que $|f'(x)| \leqslant 1/2$

d) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Prouver que, pour tout n entier naturel, on a : $|u_n - \ln 2| \leq \ln 2 (1/2)^n$

Exercice 5

a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements suivants :

A = « tirage d'un nombre pair »
B = « tirage d'un multiple de 3 »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

b) Reprendre la question précédente avec une urne de 13 boules.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Doit-on avoir peur du progrès ?

Sujet n° 2

« Nous n'héritons pas de la terre de nos parents nous l'empruntons à nos enfants ».
Illustrez et prolongez cette citation de Léopold Sédar Senghor (1906-2001), chef d'Etat et poète.

Sujet n° 3

Les réseaux sociaux, médias en ligne, blogs redonnent-ils du pouvoir aux citoyens ?

École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée
ENSEA-Abidjan

AVRIL 2017
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES
ITS Voie B Option Économie

Composition d'économie
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Que peuvent faire les banques centrales lorsque l'inflation est faible et le chômage élevé ?

Sujet 2

1. Exercice de microéconomie (7 points)

Partie A

Alice et Bob jouent à un jeu où ils peuvent choisir de se déplacer vers le haut ou vers le bas. Leurs gains dépendent du côté vers lequel ils vont se déplacer, ainsi que du côté où va se déplacer leur partenaire. Ils ne peuvent pas communiquer avant de jouer, donc ils décident de manière indépendante. Voici la matrice des gains. Dans chaque couple de valeurs, le gain de Bob est à gauche, et le gain d'Alice à droite (par exemple : "Si Alice va en haut et Bob va en Haut, Bob gagne 1 et Alice gagne 2").

		Alice	
		haut	bas
Bob	haut	1 ; 2	2 ; 1
	bas	2 ; 3	3 ; 2

1. Où va aller Alice ?
2. Où va aller Bob ?
3. Quel est l'équilibre de Nash et les gains correspondants ?

Partie B

Une consommatrice a 200$ à la période t. Elle va gagner 1000$ à la période $t+1$. Elle se demande combien consommer et combien emprunter à la période t.

Sa fonction d'utilité est $U = U(C_t, C_{t+1}) = \sqrt{C_t}\sqrt{C_{t+1}}$. Le taux d'intérêt réel est $r = 10\%$. Dans cette partie de l'exercice, vous arrondirez les résultats à l'unité la plus proche.

1. Exprimez la contrainte budgétaire intertemporelle de la consommatrice. Puis représentez-la sur un graphique avec C_t en abscisses et C_{t+1} en ordonnées

2. Expliquez à quoi correspondent les points (0,1220), (1109,0) et (200, 1000).
3. Représentez graphiquement une baisse hypothétique du taux d'intérêt
4. On en reste au cas où $r = 10\%$. Calculez combien la consommatrice va dépenser (C_t) et emprunter à la période t. Détaillez les calculs et/ou les étapes du raisonnement.

2. Exercice de macroéconomie (7 points)

On considère une économie ouverte. Y est le PIB, i le taux d'intérêt, e est le taux de change à l'incertain. Pour simplifier, on suppose les prix fixés et égaux à 1 (ainsi, le PIB nominal est égal au PIB réel, et la demande nominale de monnaie est égale à la demande réelle de monnaie).

La consommation s'écrit $C = 0,8Y + 10$
L'investissement est $I = 800 - 600i$
La demande de monnaie est $L_d = 2Y - 400i$
L'offre de monnaie est $L_o = 2800$
Les importations sont $M = 0,2Y$
Les exportations sont $X = 240e$
Enfin, le solde des mouvements de capitaux est $K = 900i - 500$

1. Écrivez l'équation IS.
2. Écrivez l'équation LM.
3. Pourquoi les importations dépendent-elles du revenu national, et les exportations du taux de change à l'incertain ?
4. Pourquoi le solde des mouvements des capitaux dépend-il positivement du taux d'intérêt ?
5. En comptabilité nationale, comment s'appelle le solde $X - M$?
6. Pourquoi le solde de la balance des paiements est-il toujours égal à zéro ?
7. Écrivez l'équation BP.
8. Calculez Y, i et e à l'équilibre (lorsque les relations IS, LM et BP sont vérifiées). Vous arrondirez à trois chiffres après la virgule.

3. Questions (6 points)

1. Datez (au moins approximativement) la **révolution marginaliste**. Nommez-en les trois principaux contributeurs. Expliquez-en les enjeux pour la théorie économique.
2. En comptabilité nationale, quelles sont les trois définitions du PIB ? Exprimez-les par une une égalité ($PIB = ... = ... = ...$), en économie fermée sans gouvernement.
3. Qu'est-ce que l'équivalence ricardienne ? Quelles en sont les conséquences en termes de politiques budgétaires ? Sur quelles hypothèses cette théorie repose-t-elle ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1

Une des directions du ministère de l'Économie reçoit une livraison de 10 smartphones. Afin de pouvoir dire au service comptable de payer la facture du fournisseur, n'ayant pas la possibilité matérielle de tester l'ensemble des machines fournies, le responsable décide alors de prélever au hasard un échantillon de 3 smartphones afin de valider le paiement, sachant que la facture est payée lorsque le test conduit à ne pas détecter de machines défectueuses.

Partez de l'hypothèse d'une proportion de 30 % de machines défectueuses, autrement dit, la livraison comporterait avec cette hypothèse 3 smartphones défectueux (ce paramètre pouvant varier de 0 à 10 si l'on veut avoir une vision complète des risques encourus).

1) Dans cette hypothèse, calculez, en faisant appel aux techniques de dénombrement, la probabilité d'observer sur l'échantillon zéro, une ou 2 machines défectueuses.
2) Comment varie cette probabilité d'observer un échantillon totalement conforme (aucune machine défectueuse) en fonction du nombre réel de machines défectueuses dans la livraison ?
3) Indiquer les raisons qui permettent au responsable du ministère de s'interroger sur l'opportunité de prélever un échantillon plus important.
4) Avant de répondre au responsable, de quels éléments financiers supplémentaires avez-vous besoin pour étayer votre argumentaire basé sur des critères statistiques ?

Exercice 2

Les ventes annuelles (chiffre d'affaires) dans un commerce d'un produit sont fournies dans le tableau ci-après. Les hausses tarifaires de cet article prennent effet au 1er janvier. La hausse de prix du 1er janvier 2011 a été de 5 %, celle du 1er janvier 2012 de 8 %, celle du 1er janvier 2013 de 3 % et celle du 1er janvier 2014 de 6 % (ces hausses étant calculées sur la base des tarifs au 1er janvier de l'année précédente).

En vous aidant du tableau ci-dessous portant sur le chiffre d'affaires, il vous est demandé de calculer la série annuelle des chiffres d'affaires hors inflation, en vous mettant aux conditions économiques du 1er janvier 2010.

Chiffre d'affaires du produit
(en milliers d'euros)

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Ventes	1000	1197	1508	1864	2538

Commentez ce résultat.

Exercice 3

À partir des tableaux ci-dessous tirés d'une étude réalisée au Maroc par le Haut Commissariat au Plan et intitulée « Prospective Maroc 2030 » (août 2011), il vous est demandé de rédiger un article de 30 lignes maximum sur la démographie au Maroc, en intégrant au moins 10 idées différentes.

Tableau 1
Évolution rétrospective de la population marocaine et de son flux annuel moyen d'accroissement

		Accroissement annuel moyen correspondant *(en %)*	
Année	Population *(en millions)*	Période	Taux
1900	5,00	-	-
1912	5,40	1900-1912	0,6
1936	7,04	1912-1936	1,1
1952	8,95	1936-1952	1,5
1960	11,63	1952-1960	3,3
1971	15,38	1960-1971	2,6
1982	20,42	1971-1982	2,6
1994	26,02	1982-1994	2,0
2004	29,84	1994-2004	1,4
2007	30,84	2004-2007	1,1

Tableau 2
Age au premier mariage (en années) selon le sexe, par milieu de résidence

Milieu de résidence	1960	1971	1982	1994	2004
Masculin					
- Urbain	24,6	26,7	28,5	30,9	32,2
- Rural	23,9	24,8	25,6	28,1	29,5
Féminin					
- Urbain	17,5	20,8	23,7	26,4	27,1
- Rural	17,2	18,7	20,8	23,7	25,5

Tableau 3
Population par milieu de résidence

	Urbain		Rural		
Année	Effectifs (en millions)	Taux d'accroissement annuel moyen (%)	Effectifs (en millions)	Taux d'accroissement annuel moyen (%)	Proportion de citadins (%)
1960	3,4	-	8,2	-	29
1971	5,4	4,3	10,0	1,8	35
1982	8,7	4,5	11,7	1,4	43
1994	13,4	3,6	12,7	0,7	51
2004	16,5	2,1	13,4	0,6	55

Tableau 4
Répartition (en %) de la population par grands groupes d'âge

Année	0-14 ans	15-59 ans	60 ans et plus
1960	44,4	48,4	7,2
1971	46,9	46,9	7,2
1982	42,1	51,5	6,4
1994	37,0	56,0	7,0
2004	31,3	60,6	8,1

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

a) On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant et on obtient :

$u_n = \frac{2}{5}\frac{1+\frac{(-1)^n}{(2n)}}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{(5n)}}$. Le second terme tend vers 1, donc la suite converge vers 2/5.

b) Si *a*=*b*, les termes de la suite sont nuls et la suite converge vers 0.

Si *a*<*b*, on écrit $u_n = \frac{-1+(\frac{a}{b})^n}{1+(\frac{a}{b})^n}$. Comme $(\frac{a}{b})^n$ tend vers 0, la suite converge vers -1.

Si *a*>*b*, on écrit $u_n = \frac{1-(\frac{b}{a})^n}{1+(\frac{b}{a})^n}$. Comme $(\frac{b}{a})^n$ tend vers 0, la suite converge vers 1.

c) La suite peut aussi s'écrire comme $u_n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{2x}{(n+x)})}$. Or, comme $\frac{-2x}{(n+x)}$ tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de ln $(1 + a)$ au voisinage de zéro (qui est a). Ce qui donne que la suite converge vers e^{-2x}.

Exercice 2

a) Les vecteurs (2,1,0) et (-1,0,1) engendrent *F* et sont linéairement indépendants. C'est donc une base de *F* et dim *F* = 2.

Les vecteurs (1,2,0) et (0,2,1) engendrent *G* et sont linéairement indépendants. C'est donc une base de *G* et dim *G* = 2.

b) Le vecteur (-1,0,1) engendre $F \cap G$. Une famille constituée d'un vecteur non nul est libre, donc c'est une base de $F \cap G$. Dim $F \cap G$= 1.

c) L'espace vectoriel engendré par la réunion des deux bases est *F* + *G*. On doit démontrer que *F* + *G* = $\mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit de démontrer que dim (*F* + *G*) = 3. On sait que :

dim (*F* + *G*) = dim *F* + dim *G* – dim ($F \cap G$). On en conclut bien que dim (*F* + *G*) = 3.

d) *F* et *G* ne sont pas supplémentaires car $F \cap G$ n'est pas l'ensemble vide.

Exercice 3

Écrivons l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse a. Il s'agit de :

$y - a^2 = 2a(x - a)$, soit $y = 2ax - a^2$

De même, l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = {}^1/_x$ au point d'abscisse b s'écrit :

$y - \frac{1}{b} = \frac{-1}{b^2}(x - b)$, soit $y = \frac{-1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

Pour que les deux tangentes coïncident, il faut que a et b vérifient $2a = \frac{-1}{b^2}$ et $-a^2 = \frac{2}{b}$

On en déduit que a = 0 ou a = -2. La solution a = 0 est à exclure car on ne peut déterminer b dans ce cas. Pour a = -2, on obtient b = -1/2. On vérifie facilement que les tangentes en a et en b coïncident.

Exercice 4

a)$g'(x) = (x - 1)\mathrm{e}^x + 1$; $g''(x) = x\mathrm{e}^x$

Comme la fonction g'' est positive sur le domaine de définition et que $g'(0) = 0$, g' est croissante et positive sur le domaine de définition. Donc g est croissante et comme $g(0) = 0$, g est positive sur le domaine de définition.

b) La fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle]0, +∞[avec $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$

Au point 0, on va vérifier que la fonction f est continue. C'est évident en utilisant le développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de zéro :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Le développement de la dérivée de f en zéro est -1/2. On en déduit que f est de classe C^1 sur le domaine de définition et que $f'(0) = -1/2$.

c) Le calcul n'est pas détaillé ici. En utilisant la question a) et les propriétés de la fonction exponentielle, on en déduit que la fonction f'' est positive sur le domaine de définition. En conséquence, la fonction f' est croissante. On sait que $f'(0) = -1/2$. La limite de f' en l'infini se comporte comme $-x/\mathrm{e}^x$, donc elle est nulle. On en déduit que $f'(x)$ est compris entre -1/2 et 0 sur le domaine de définition. Ce qui est le résultat recherché.

d) Par l'inégalité des accroissements finis et en utilisant le résultat de la question précédente, on sait que $|f(x) - f(y)| \leqslant 1/2\,|x - y|$ pour tout x et y réels positifs. En appliquant cette inégalité pour les termes de la suite u_n et en utilisant le fait que f(ln2) = ln2, on obtient le résultat demandé par récurrence.

Exercice 5

a) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}, A ∩ B = {6, 12}

p(A) = 1/2 ; p(B) = 1/3 ; p(A ∩ B) = 1/6 = p(A)p(B).

A et B sont donc indépendants.

b) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {3, 6, 9, 12}, A ∩ B = {6, 12}

p(A) = 6/13 ; p(B) = 4/13 ; p(A ∩ B) = 2/13 ≠ p(A)p(B).

A et B ne sont pas indépendants.

École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée
ENSEA-Abidjan

AVRIL 2017
CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES
ITS Voie B Option Économie

Composition d'économie : CORRIGÉ

Sujet 1

Que peuvent faire les banques centrales lorsque l'inflation est faible et le chômage élevé ?

Exemples d'éléments de réponse pour la dissertation à partir de notions/auteurs présents dans le programme du concours :

Depuis la crise financière qui a débuté en août 2007, la plupart des pays développés occidentaux n'ont retrouvé ni leur niveau de croissance, ni celui d'emploi, d'avant-crise. Pour ce qui est du Japon, cette situation de stagnation dure depuis le krach financier de 1990. On peut s'interroger sur ce que la politique monétaire peut faire pour améliorer une situation de longue stagnation économique. Avant la crise, le ciblage d'inflation était la norme (règle de Taylor). Il s'est heurté à la trappe à liquidité. Des politiques non-conventionnelles ont été tentées.

1. *Selon les monétaristes et les nouveaux classiques, la politique monétaire n'a pas d'effets positifs sur les performances de l'économie réelle.*
   — *Vision dichotomique de l'économie : la monnaie est neutre, la sphère réelle est indépendante de la sphère monétaire. Friedman : "comme si la monnaie tombait d'un hélicoptère"*
   — *Théorie quantitative de la monnaie : M est exogène, n'influence que P. La détermination du PIB et du chômage est totalement indépendante.*
   — *Par conséquent, la politique monétaire ne peut pas influencer le PIB et l'emploi. Si l'inflation est faible et le chômage élevé, ce n'est pas le problème de la politique monétaire. Les banques centrales doivent garder le cap : être indépendantes, cibler une inflation faible.*
2. *Selon les keynésiens, la politique monétaire a un rôle à jouer dans le pilotage de l'économie réelle*
   — *Pour Keynes, les agents économiques demandent de la monnaie pour elle-même. Donc pas de dichotomie. Illustration : modèle IS-LM (Keynes vu par Hicks) : la banque centrale détermine M, mais la politique monétaire a des effets sur le PIB. Une politique expansionniste est envisageable.*
   — *Pour certains nouveaux keynésiens et les post-Keynésiens, la monnaie est endogène, essentiellement créée par le crédit. Donc, la banque centrale ne définit pas M mais le taux d'intérêt directeur. Pour faire face à la stagnation, les taux d'intérêt négatifs sont une possibilité, qui est tentée depuis 2015. Si ces taux négatifs n'ont pas eu d'effets catastrophiques, l'effet sur l'économie réelle n'est pas radical.*
   — *Si les politiques conventionnelles échouent, c'est peut-être parce que le taux d'intérêt n'est pas le seul déterminant de la création monétaire. En particulier, la demande de crédit est*

fortement affectée par le pessimisme des firmes et des ménages. Ancrer les anticipations sur le fait que les taux vont rester bas ne suffit pas. La BCE a envisagé "l'hélicoptère-monnaie" (distribuer des euros directement).

3. *Les politiques non-conventionnelles n'ont pas enrayé la crise non plus*
   — *Si crise majeure, trappe à liquidité (Keynes, Krugman). La politique conventionnelle (règle de Taylor) devient impuissante. Donc la banque centrale doit tout faire pour éviter que cela se produise. Par exemple, cible d'inflation non-nulle afin d'avoir une marge de manoeuvre. Blanchard (FMI) reconnait que la cible de 2% était trop basse. Lors de la prochaine période de croissance, il faudra cibler plus haut (par exemple 4%).*
   — *Depuis le début de cette crise majeure, politiques monétaires non-conventionnelles : quantitative easing, qualitative easing, credit easing. Le but est de relancer le crédit (donc l'investissement et la demande globale) lorsque le canal du taux d'intérêt est impuissant. Les effets : ces mesures ont limité le krach, mais pas arrêté la stagnation durable.*
   — *Les banques centrales peuvent définir des politiques macro et microprudentielles pour éviter la prochaine crise majeure.*

Conclusion : Les politiques monétaires, conventionnelles comme non-conventionnelles, qui ont été tentées suite à la crise, ont failli à relever le niveau de l'emploi et de l'inflation. Si la politique monétaire peut prévenir (ou favoriser) la survenue d'un krach, les politiques tentées jusqu'à aujourd'hui se sont révélées insuffisantes pour relancer une dynamique de croissance. Le "Quantitative Easing for the people" (hélicoptère, distribution d'euros aux ménages) ou l'annulation de dettes du secteur privé (à la Richard Koo, Steve Keen, ou encore David Graeber) sont des options radicales non encore explorées.

Sujet 2

1. Exercice de microéconomie (7 points)

Partie A

Alice et Bob jouent à un jeu où ils peuvent choisir de se déplacer vers le haut ou vers le bas. Leurs gains dépendent du côté vers lequel ils vont se déplacer, ainsi que du côté où va se déplacer leur partenaire. Ils ne peuvent pas communiquer avant de jouer, donc ils décident de manière indépendante. Voici la matrice des gains. Dans chaque couple de valeurs, le gain de Bob est à gauche, et le gain d'Alice à droite.

		Alice	
		haut	bas
Bob	haut	1 ; 2	2 ; 1
	bas	2 ; 3	3 ; 2

1. Où va aller Alice ?
   Alice considère ses gains en fonction du choix de Bob. Si Bob va en haut, Alice a intérêt à aller en haut ($2 > 1$)*. Si Bob va en bas, Alice a intérêt à aller en haut aussi* ($3 > 2$)*. Donc Alice va se déplacer vers le haut.*
2. Où va aller Bob ?
   Si Alice va vers le haut, Bob a intérêt à se déplacer vers le bas ($2 > 1$)*. Si Alice va vers le bas, Bob a aussi intérêt à aller vers le bas* ($3 > 2$)*. Donc Bob va aller vers le bas.*
3. Quel est l'équilibre de Nash et les gains correspondants ?
   Alice est en haut et Bob est en bas. Alice gagne 3 et Bob gagne 2.

Partie B

Une consommatrice a 200$ à la période t. Elle va gagner 1000$ à la période $t+1$. Elle se demande combien consommer et combien emprunter à la période t. Sa fonction d'utilité est $U = U(C_t, C_{t+1}) = \sqrt{C_t}\sqrt{C_{t+1}}$. Le taux d'intérêt réel est $r = 10\%$. Dans cette partie de l'exercice, vous arrondirez les résultats à l'unité la plus proche.

1. Exprimez sa contrainte budgétaire intertemporelle. Puis représentez-la sur un graphique avec C_t en abscisses et C_{t+1} en ordonnées
   La contrainte s'écrit :
   $$C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} = 200 + \frac{1000}{1,1} \tag{1}$$
2. Expliquez à quoi correspondent les points (0,1220), (1109,0) et (200, 1000).
   Respectivement : le cas où elle ne consomme rien à la période t et place tout. Le cas où elle consomme tout à la période t et emprunte le maximum qu'elle peut. Le cas où elle consomme son revenu t à la période t, et son revenu $t+1$ *à la date* $t+1$*.*
3. Représentez graphiquement une baisse hypothétique du taux d'intérêt
   La contrainte budgétaire pivote autour du point (200, 1000).
4. On en reste au cas où $r = 10\%$. Calculez combien elle va dépenser et emprunter à la période t. Détaillez les calculs et/ou les étapes du raisonnement.

La consommatrice veut maximiser son utilité sur les deux périodes $U(C_t, C_{t+1})$ sous la contrainte $C_t + \frac{C_{t+1}}{1+r} = 200 + \frac{1000}{1,1}$.
On peut ramener ce programme d'optimisation au choix d'une seule variable : E_1, la quantité empruntée à la période 1.
En effet, $C_1 = R_1 + E_1$ et $C_2 = R_2 - (1+r)E_1$. Or, toutes ces variables sont connues à l'exception de E_1.
Il suffit donc de vérifier que $\forall E_1 < 909$ (la quantité maximale empruntée) on a $\frac{\partial^2 U}{\partial E_1^2} < 0$. C'est le cas. Ensuite, on cherche E_1^* tel que $\frac{\partial U}{\partial E_1^*} = 0$
Par conséquent, la consommatrice va emprunter 381\$ à la période t et les rembourser à la période $t+1$. Elle va donc consommer 581\$ à la période t.

2. Exercice de macroéconomie (7 points)

On considère une économie ouverte. Y est le PIB, i le taux d'intérêt, e est le taux de change à l'incertain. Pour simplifier, on suppose les prix fixés et égaux à 1 (ainsi, le PIB nominal est égal au PIB réel, et la demande nominale de monnaie est égale à la demande réelle de monnaie).

La consommation s'écrit $C = 0,8Y + 10$
L'investissement est $I = 800 - 600i$
La demande de monnaie est $L_d = 2Y - 400i$
L'offre de monnaie est $L_o = 2800$
Les importations sont $M = 0,2Y$
Les exportations sont $X = 240e$
Enfin, le solde des mouvements de capitaux est $K = 900i - 500$

1. Écrivez l'équation IS.
   C'est l'équation qui assure l'égalité $I = S$ c'est à dire $I = Y - C$
$$IS : 800 - 600i = 0,2Y - 10 \Leftrightarrow Y = 4050 - 3000i \tag{2}$$
2. Écrivez l'équation LM.
$$LM : L_d = L_o \Leftrightarrow Y = 1400 + 200i \tag{3}$$
3. Pourquoi les importations dépendent-elles du revenu national, et les exportations du taux de change à l'incertain ?
   Les importations dépendent des flux de revenus des consommateurs (donc du PIB national). Les exportations dépendent de la compétitivité : plus le taux de change à l'incertain est fort (c'est à dire que la monnaie domestique est faible par rapport à la devise étrangère), plus le pays domestique est compétitif.
4. Pourquoi le solde des mouvements des capitaux dépend-il positivement du taux d'intérêt ?
   Plus le taux d'intérêt est élevé, plus il est rentable de placer ses capitaux dans le pays domestique.
5. En comptabilité nationale, comment s'appelle le solde $X - M$?
   La balance commerciale.
6. Pourquoi le solde de la balance des paiements est-il toujours égal à zéro ?
   C'est une égalité comptable. $X - M = K$. C'est à dire que $BP = (X - M) - K$. $BP = 0$ par construction comptable.

7. Écrivez l'équation BP. *(1 point)*

$$BP : X - M = K \Leftrightarrow Y = 1200e - 4500i + 2500 \tag{4}$$

8. Calculez Y, i et e à l'équilibre (lorsque les relations IS, LM et BP sont vérifiées). Vous arrondirez à trois chiffres après la virgule.
Il suffit de résoudre le système. On trouve $i \simeq 0,828 = 82,8\%$, $Y \simeq 1566$ *et* $e \simeq 2,327$ *(une unité de devise étrangère s'échange contre 2,327 unités de devise domestique).*

3. Questions (6 points)

1. Datez (au moins approximativement) la **révolution marginaliste**. Nommez les trois principaux contributeurs. Expliquez les enjeux pour la théorie économique.
Deuxième moitié du XIX^{è}. Walras, Menger, Jevons. Par rapport aux classiques, passage de la valeur-travail à la valeur-utilité. En termes de méthode, analyse mathématique, raisonnement "à la marge" = dérivation (querelle des méthodes avec l'école historique)
2. En comptabilité nationale, quelles sont les trois définitions du PIB ? Exprimez-les par une une égalité ($PIB = ... = ... = ...$), en économie fermée sans gouvernement.
Somme des valeurs ajoutées brutes (somme des richesses créées). Somme des revenus distribués. Somme des dépenses (emplois). En économie fermée privée, $PIB = \Sigma VAB = \Pi + W = C + I$.
3. Qu'est-ce que l'équivalence ricardienne ? Quelles en sont les conséquences en termes de politiques budgétaires ? Sur quelles hypothèses cette théorie repose-t-elle ?
Intuition de Ricardo, formalisation par Barro. Aussi appelée effet Ricardo-Barro. En cas de politique budgétaire expansionniste, les agents économiques anticipent une hausse future des impôts et donc augmentent leur épargne. Par conséquent, les politiques budgétaires expansionnistes sont inefficaces. Cependant, cette théorie repose sur des ***hypothèses drastiques*** *: les agents sont rationnels et se livrent à l'optimisation intertemporelle. Ils ont accès au système financier pour épargner. Par ailleurs, la dette publique n'est absorbée ni par la hausse du PIB (or les ressources publiques dépendent du PIB :* $T = tY$*), ni par la monétisation. En fait cette théorie repose sur les hypothèses nouvelles classiques : les dépenses publiques n'affectent pas le PIB ; la banque centrale ne monétise pas la dette publique, les agents sont rationnels, les marchés financiers sont parfaits.*

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

1) Soit X la variable aléatoire : nombre de smartphones défectueux parmi les 3 retenus

$$P(X=0)=\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}=0{,}292$$

$$P(X=1)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=0{,}525$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=0{,}175$$

2) Si m est le nombre de smartphones défectueux dans un lot de 10, on a :

$$P(X=0)=\frac{C_m^0C_{10-m}^3}{C_{10}^3}=\frac{(10-m)(9-m)(8-m)}{10\text{x}9\text{x}8}$$

m=0	P=100%	m=3	P=29,2%	m=6	P=3,3 %
m=1	P=70%	m=4	P=16,7%	m=7	P=0,8 %
m=2	P=46,7%	m=5	P=8,3%	m=8	P=0%

3) La lecture de la question précédente est la suivante : si le fournisseur livre 3 smartphones défectueux dans le lot livré de 10 smartphones, dans 29,2 % des cas, le test réalisé par le ministère ne va pas le détecter et va donc payer la facture. Il est logique de vouloir réduire cette probabilité.

4) Si on teste 4 machines au lieu de 3, il faut actualiser la question 2 avec un échantillon de 4 :

$$P(X=0)=\frac{C_m^0C_{10-m}^4}{C_{10}^4}=\frac{(10-m)(9-m)(8-m)(7-m)}{10\text{x}9\text{x}8\text{x}7}$$

m=0	P=100%	m=3	P=16,7%	m=6	P=0,5 %
m=1	P=60%	m=4	P=7,1%	m=7	P=0%
m=2	P=33,3%	m=5	P=2,4%		

Toujours dans l'hypothèse d'une proportion de 30 % de machines défectueuses dans la livraison (hypothèse de départ), la probabilité de n'observer aucune machine défectueuse dans l'échantillon passe de 29,2 % à 16,7 %. L'espérance de perte financière liée à l'acceptation d'un lot passe donc de 0,292 x le prix unitaire d'un smartphone à 0,167 x le prix unitaire d'un smartphone. Il nous faut donc le prix unitaire d'un smartphone.

Il faut ensuite comparer l'écart avec le coût d'un test supplémentaire. En effet, si le coût d'un test est supérieur à l'écart calculé précédemment, il ne faut pas envisager d'augmenter l'échantillon.

Pour fixer les idées, si le coût d'un smartphone est de 500 euros, tester un appareil supplémentaire fait gagner au ministère en moyenne 62,5 euros (perte de 146 euros avec test sur 3 machines et de 83,5 euros avec test sur 4 machines). Mais si le test d'une machine supplémentaire est de 80 euros, le ministère perd finalement en moyenne 17,5 euros.

Exercice 2

Chiffre d'affaires aux conditions économiques du 1er janvier 2010
(en milliers d'euros)

1er janvier	Taux d'inflation annuel	Indice des prix (base 100 au 1/1/2010)	Chiffre d'affaires en milliers d'euros courants	Chiffre d'affaires en milliers d'euros constants
2010	-	100	1000	1000
2011	5%	105	1197	1140 (*)
2012	8%	113,4	1508	1330
2013	3%	116,8	1864	1596
2014	6%	123,8	2538	2050

(*) 1140 = 1197 (colonne 4) / 1,05 (colonne 3)

Commentaire : le commerce a vendu 2 fois plus en volume en 2014 par rapport à 2010.

Exercice 3

Pas de corrigé type mais pour exemple, on peut citer que la population du Maroc a été multiplié par 6 en 100 ans, que la croissance de la population a été la plus forte sur la période 1952-1960, que cette croissance ralentit ces dernières années, que l'âge au premier mariage a reculé depuis 1960, plus pour les femmes que pour les hommes, qu'il y a aujourd'hui une majorité de citadins au Maroc, que la population vieillit, etc.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Remarque :* les exercices sont indépendants**

Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction g définie sur R par $g(x) = e^x - x$

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère l'équation notée (En) :

$$g(x) = n$$

d'inconnue le réel x

1) Dresser le tableau de variation de g et tracer son graphe *(on précisera son comportement aux infinis)* en précisant les limites aux bornes.

2) Montrer que l'équation (En) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée r_n et l'autre strictement positive notée t_n.

Partie 2

Dans cette partie, on note (u_n), n appartenant à l'ensemble des entiers naturels, la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ pour\ k \geqslant 1, u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

1) On rappelle que r_2 est le réel strictement négatif obtenu dans la partie 1, question 2, lorsque $n = 2$. Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq r_2 \leq -1$.

2) Justifier que $e^{r_2} - 2 = r_2$. En déduire par récurrence que $r_2 \leq u_k \leq -1$.

3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$, $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b-a)$.

4) Montrer que pour tout entier naturel k, $u_{k+1} - r_2 = e^{u_k} - e^{r_2}$. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel k, $0 \leq u_k - r_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$.

5) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 2

On considère les trois matrices de $M_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie 1

1) Donner les valeurs propres de A.

2) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$

Partie 2

On note E l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ d'ordre deux telles que AM = MD.

1) Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

2) Montrer que M appartient à E si et seulement si z = 0 et y = t.

3) Établir que (U,A) est une base de E.

4) Calculer le produit UA. Est-ce un élément de E ?

Partie 3

On note f : $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout M appartenant à $M_2(\mathbb{R})$, par : f (M) = AM – MD.

1) Vérifier que f est linéaire.

2) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.

3) Donner la dimension de l'image de f.

4) Déterminer les matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ telles que f (M) = M. En déduire que 1 est valeur propre de f et donner la dimension de l'espace propre associé. Montrer que -1 est aussi valeur propre de f et donner la dimension de l'espace propre associé.

5) Est-ce que f est diagonalisable ?

6) Montrer que $f \circ f \circ f = f$

<u>Exercice 3</u>

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1) Donner une relation entre p_{n-1} et p_n.

2) Soit la suite $u_n = p_n - 1/2$, calculer u_{n+1} en fonction de u_n et de n, puis de p et de n.

3) En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.

4) En déduire la limite de p_n . Qu'en pensez-vous ?

<u>Exercice 4</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Modernité et tradition, clivage ou complémentarité ?

Sujet n° 2

Explicitez la citation de Simone Weil, philosophe française, *« La joie est notre évasion hors du temps »*. (La connaissance surnaturelle - 1942)

Sujet n° 3

Les frontières sont-elles nécessaires ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

Les marchés maximisent-ils le bien-être social ?

Sujet 2

1) Exercice de microéconomie (7 points)

Le marché des bouteilles en verre du pays Justan est caractérisé par 100 entreprises en concurrence pure et parfaite qui ont toutes la même fonction de coût qui est la suivante : $C = 10 + 0{,}5\ Q^2 + 4\ Q$.

La fonction de demande totale pour les bouteilles en verre est la suivante : $Q = 300 - 20\ P$.

1) Donnez la fonction d'offre (Q en fonction de P) d'une firme.

2) Déduisez-en la fonction d'offre de l'ensemble du marché.

3) Calculez la quantité et le prix d'équilibre sur ce marché.

4) Donnez les profits (ou pertes) de chaque entreprise.

L'entreprise Topbouteille est en position de monopole sur le marché des bouteilles en verre du pays Juiceland. Elle paie un loyer de 300 000 pour le terrain et les équipements qu'elle utilise (ce sont ses seuls coûts fixes).
Sa fonction de coûts variables est donnée par la formule suivante : $CV = Q^2$.
L'entreprise Topbouteille fournit la totalité des producteurs de jus d'orange du pays. Leur demande pour les bouteilles suit la fonction suivante : $Q = 350 - 0{,}25\ P$.

5) Quelle(s) propriété(s) du coût total en fonction de la quantité, font de Topbouteille une entreprise monopolistique ?

6) L'entreprise maximise son profit. Quelles sont la quantité et le prix d'équilibre ?

7) L'entreprise Topbouteille est-elle un monopole naturel ?

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Dans un pays, les ménages consomment $C = C_0 + c(Y\text{-}T)$
L'État lève des impôts T et dépense un montant G_0.
Les entreprises investissent un montant I_0.

1) Écrivez le total de la demande globale.

2) Expliquez en quoi la fonction de consommation est keynésienne (expliquez C_0 et c).

3) Exprimez le multiplicateur d'investissement.

4) Exprimez le multiplicateur fiscal. Pourquoi est-il négatif ?

5) Sachant que $0 < c < 1$, comparez ces deux multiplicateurs et expliquez pourquoi l'un est plus élevé en valeur absolue que l'autre.

On pose $c = 0{,}7$; $C_0 = 60$; $T_0 = 40$; $I_0 = 70$ et $G_0 = 85$

6) Calculez Y.

7) Calculez le solde budgétaire G-T. D'un point de vue keynésien, le signe de cette valeur est-il une bonne chose ?

3) Questions (6 points)

1) Expliquez la **théorie de la valeur-travail**, et mentionnez le courant de pensée auquel elle appartient.

2) Qu'est-ce que la courbe de Phillips ?

3) Dans quels buts, et comment, un pays peut-il dévaluer sa monnaie ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Remarque ***: les exercices sont indépendants. Les justifications et commentaires sont indispensables.***

Attention ***: le document 4 complété devra être rendu avec la copie.***

Exercice 1

Le document 1 (cf. annexe 1) est le bulletin trimestriel publié au Bénin sur l'indice harmonisé de la production industrielle.

1) Calculer le glissement trimestriel entre le 3ème trimestre 2014 et le second trimestre 2014 de l'indice global.

2) Calculer le glissement annuel entre le 3ème trimestre 2014 et le 3ème trimestre 2013 de l'indice global.

3) A partir des données figurant dans le tableau, calculer une estimation de l'indice global pour le 1er trimestre 2015. Justifier les hypothèses prises et les calculs.

4) Commenter le graphique figurant en bas du document.

Exercice 2

Le document 2 (cf. annexe 2) est le bulletin mensuel publié en Mauritanie sur l'indice national des prix à la consommation.

1) En examinant les chiffres figurant dans la colonne « pondérations » du tableau 1, vous constaterez deux anomalies, il vous est demandé de les identifier.

2) Déterminer cinq points saillants issus de l'exploitation des données figurant dans le document 2.

Exercice 3

Le document 3 (cf. annexe 3) donne les résultats de l'enquête sur le tabagisme chez les adultes au Sénégal.

Il vous est demandé de trouver dans ces tableaux les chiffres pour compléter le résumé figurant dans le document 4 qui contient 14 phrases. Ce document devra être rendu avec votre copie.

Document 1

Bulletin trimestriel de l'Indice Harmonisé de la Production Industrielle

QUATRIEME TRIMESTRE 2014

AVERTISSEMENT

L'INSAE a le plaisir de mettre à la disposition des utilisateurs, l'Indice Harmonisé de la Production Industrielle (IHPI). L'IHPI a pour population de référence l'ensemble des entreprises industrielles installées au Bénin. Les données sont collectées trimestriellement auprès des entreprises industrielles regroupées dans 6 groupes industriels à savoir les industries extractives, les industries alimentaires, les industries textiles, les industries chimiques, l'énergie et les autres industries.

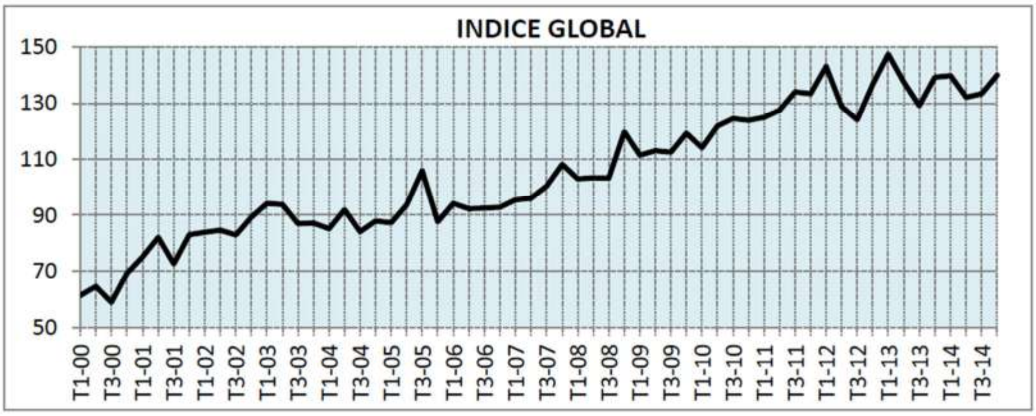
Au total, 43 produits sont suivis auprès de 46 entreprises industrielles réparties en 6 branches d'activité. La période de base de l'IHPI est l'année 2007 et les pondérations de l'indice ont été déterminées à partir des chiffres d'affaire hors taxes des entreprises de chaque branche. L'indice calculé est de type Laspeyres.

La Production Industrielle toujours en hausse au quatrième trimestre 2014...

Au quatrième trimestre 2014, l'indice de la production industrielle s'est établi à 140,0 contre 133,4 au trimestre précédent, soit une hausse de 4,9% en glissement trimestriel et une légère hausse de 0,5% en glissement annuel. Hormis les industries extractives et alimentaires qui ont été contre performantes, l'activité industrielle s'est bien tenue dans l'ensemble par rapport au trimestre précédent. Il faut particulièrement noter la bonne tenue des industries chimiques (+21,8%) et énergétiques (+12,0%).

Périodes	T3-13	T4-13	T2-14	T3-14	T4-14	Glissement trimestriel (T/T-1)	Glissement annuel (T/T-4)
Industrie Extractive	101,2	84,7	98,2	121,6	95,7	-21,3%	12,9%
Industrie alimentaire	111,3	132,2	139,2	125,5	124,2	-1,1%	-6,1%
Industrie textile	86,7	92,7	94,3	104,2	106,9	2,5%	15,3%
Industrie chimique	83,2	100,5	78,5	76,4	93,1	21,8%	-7,4%
Energie	178,6	196,5	193,2	185,8	208,1	12,0%	5,9%
Autres industries	115,6	113,6	95,7	111,9	113,2	1,1%	-0,4%
INDICE GLOBAL	129,1	139,2	132,1	133,4	140,0	4,9%	0,5%

Source : INSAE, DSEE



3

Document 2

République Islamique de Mauritanie
Honneur- Fraternité- Justice
Ministère de l'Economie et des Finances
Office National de la Statistique

الجمهورية الإسلامية الموريتانية
شرف - إخاء - عدل
وزارة الاقتصاد و المالية
المكتب الوطني للإحصاء

إحصائيات موريتانيا

Indice National des Prix à la Consommation — Juin– 2017– يونيو — المؤشر الوطني لأسعار الاستهلاك
Base 100 en 2014 أساس 100 في 2014

AVERTISSEMENT

L'Office national de la statistique (ONS) publie depuis janvier 2016, la note mensuelle de l'Indice national des prix à la consommation (INPC). Cet indice (base 100 = 2014), mesure l'évolution des prix au plan national. Les indices sont de type Laspeyres et les pondérations sont issues des dépenses de consommation des ménages tirées de l'Enquête permanente sur les conditions de vie (EPCV) de 2014. Le champ couvert par l'indice national des prix à la consommation est l'ensemble du pays découpé en 5 zones, à savoir l'Est, le Sud, le Nord, Dakhlett, Nouadhibou et Nouakchott. Ces cinq zones sont représentées respectivement par Aioun, Rosso, Atar, Nouadhibou et Nouakchott. La collecte des prix se fait dans ces régions. L'INPC est publié selon la classification des fonctions de consommation des ménages à 12 fonctions (COICOP). La méthodologie est conforme à celle appliquée pour le calcul du nouvel Indice harmonisé des prix à la consommation (IHPC base 100= 2014) dont la couverture est limitée à l'agglomération de Nouakchott. Le panier de la ménagère comprend **624** variétés suivies dans **2 814** points d'observation. Près de **19 825** relevés de prix sont effectués chaque mois par les enquêteurs de l'ONS.

تنويه

يصدر المكتب الوطني للإحصاء منذ يناير 2016، النشرة الشهرية المتعلقة بالمؤشر الوطني لأسعار الاستهلاك. هذا المؤشر (ذي الأساس 100 سنة 2014)، يقيس تطور الأسعار على المستوى الوطني.
المؤشرات من نوع لاسبرس و الترجيحات تم حسابها باستخدام المصروفات الاستهلاكية للأسر المسحوبة في المسح الدائم حول الظروف المعيشية لسنة 2014.
مجال تغطية المؤشر الوطني لأسعار الاستهلاك هو عموم البلاد مقسمة إلى 5 مناطق وهي : الشرق، الجنوب، الشمال، داخلت نواذيبو و نواكشوط. هذه المناطق الخمسة ممثلة على التوالي ب : لعيون، روصو، أطار، نواذيبو و نواكشوط. جمع الأسعار يتم داخل هذه المناطق. المؤشر الوطني لأسعار الاستهلاك يتم نشره حسب تصنيف وظائف استهلاك الأسر ذا الاثنى عشر (12) وظيفة (COICOP). المنهجية المتبعة مطابقة لتلك المطبقة في حساب المؤشر الموحد لأسعار الاستهلاك (أساس 100 سنة 2014) و الذي لا تتعدى تغطيته منطقة نواكشوط.
تشمل سلة الأسرة **624** عنصر، تتم متابعتها من خلال **2 814** نقطة بيع. يقوم وكلاء المكتب الوطني للإحصاء بحوالى **19 825** كشف عن الأسعار كل شهر.

Tableau 1 : Indice National des Prix à la Consommation (Base 100 en 2014)

الجدول 1 : المؤشر الوطني لأسعار الاستهلاك (أساس 100 في 2014)

Fonctions		الترجيحات Pondér-ations	مؤشر الأشهر: Indice des mois de :				النسبة المئوية للتغيرات على مدى: variations (en %) sur :			الوظائف	
N°	dont sous-groupes (❖)		يونيو -16 juin-16	مارس -17 mars-17	مايو -17 mai-17	يونيو -17 juin-17	شهر 1 mois	3 أشهر 3 mois	سنة 1 an	بما فيها المجموعات الفرعية (❖)	الرقم
01	Produits alimentaires et boissons non alcoolisées	5 100	103,1	105,3	106,5	106,2	-0,3	+0,9	+3,0	المنتجات الغذائية والمشروبات غير الكحولية	01
	❖ Pain et céréales	*1 638*	*103,6*	*102,9*	*103,1*	*103,4*	*+0,3*	*+0,5*	*-0,2*	❖ الخبز والحبوب	
	❖ Viande	*1 020*	*102,6*	*102,0*	*104,1*	*103,8*	*-0,3*	*+1,8*	*+1,2*	❖ اللحم	
	❖ Poissons et fruits de mer	*261*	*110,6*	*145,9*	*143,6*	*133,8*	*-6,8*	*-8,3*	*+21,0*	❖ الأسماك و غلال البحر	
	❖ Lait, fromage et œufs	*337*	*97,9*	*98,2*	*98,2*	*97,6*	*-0,7*	*-0,6*	*-0,3*	❖ اللبن، الجبن والبيض	
	❖ Huiles et graisses	*326*	*94,7*	*96,2*	*96,3*	*96,6*	*+0,3*	*+0,4*	*+2,0*	❖ الزيوت و المواد الدهنية	
	❖ Fruits	*103*	*109,1*	*105,5*	*108,0*	*108,9*	*+0,8*	*+3,2*	*-0,2*	❖ الفواكه	
	❖ Légumes	*560*	*110,7*	*100,8*	*106,1*	*106,9*	*+0,8*	*+6,0*	*-3,5*	❖ الخضروات	
	❖ Sucre, confiture, miel, chocolat et confiserie	*433*	*103,8*	*118,4*	*120,0*	*120,1*	*+0,1*	*+1,5*	*+15,7*	❖ السكر،المربى، العسل، الشوكالاته والحلوى	
	❖ Café, thé et cacao	*229*	*100,7*	*100,7*	*101,0*	*101,1*	*+0,2*	*+0,4*	*+0,4*	❖ القهوة، الشاي والكاكاو	
02	Tabac et stupéfiants	21	122,7	118,0	120,9	120,2	-0,6	+1,9	-2,0	التبغ والمنشطات	02
03	Articles d'habillement et chaussures	668	100,1	102,3	102,9	103,1	+0,2	+0,7	+2,9	الملابس والأحذية	03
04	Logement, eau, gaz, électricité et autres combustibles	1 032	103,0	101,2	102,1	102,1	+0,1	+0,9	-0,9	السكن، الماء، الغاز، الكهرباء و محروقات أخرى	04
05	Meubles, articles de ménage et entretien courant du foyer	333	102,6	104,2	104,5	104,6	+0,1	+0,3	+1,9	الأثاث، مقتنيات الأسرة والصيانة الجارية للمنزل	05
06	Santé	534	105,5	117,7	117,2	117,7	+0,4	-0,0	+11,5	الصحة	06
07	Transports	755	107,4	107,6	107,7	107,7	+0,0	+0,1	+0,3	النقل	07
08	Communication	707	75,3	78,0	71,4	74,2	+3,9	-4,8	-1,4	الاتصالات	08
09	Loisirs et culture	105	100,4	101,8	102,8	102,6	-0,2	+0,8	+2,2	الترفيه و الثقافة	90
10	Enseignement	390	110,6	112,0	112,1	112,1	+0,0	+0,1	+1,3	التعليم	10
11	Restaurants et Hôtels	31	101,5	102,7	102,8	102,5	-0,3	-0,2	+1,0	والفنادق المطاعم	11
12	Biens et services divers	323	102,6	102,9	103,4	103,9	+0,5	+0,9	+1,3	السلع والخدمات المتنوعة	12
Indice général		**10 000**	**101,6**	**103,7**	**104,0**	**104,1**	**+0,1**	**+0,4**	**+2,4**	**المؤشر العام**	

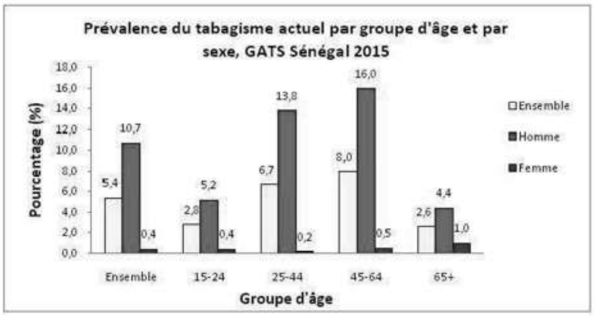
Document 3

GATS | Enquête mondiale sur le tabagisme chez les adultes

FICHE D'INFORMATION
Sénégal 2015

CONSOMMATION DE TABAC

FUMEURS	HOMMES (%)	FEMMES (%)	ENSEMBLE (%)
Fumeurs actuels	10,7	0,4	5,4
Fumeurs quotidiens	9,7	0,3	4,9
Fumeurs actuels de cigarettes[1]	9,7	0,3	4,9
Fumeurs quotidiens de cigarettes[1]	8,5	0,3	4,3
Anciens fumeurs quotidiens de tabac[2] *(parmi tous les adultes)*	10,7	0,2	5,3
Anciens fumeurs quotidiens de tabac[2] *(parmi les personnes ayant déjà fumé quotidiennement)*	51,2	-	50,6
CONSOMMATEURS DE TABAC SANS FUMÉE			
Consommateurs actuels de tabac sans fumée	0,3	1,0	0,7
Consommateurs quotidiens de tabac sans fumée	0,3	0,9	0,6
Anciens consommateurs quotidiens de tabac sans fumée[3] *(parmi tous les adultes)*	0,8	0,1	0,4
Anciens consommateurs quotidiens de tabac sans fumée[3] *(parmi les personnes ayant déjà consommé du tabac sans fumée quotidiennement)*	72,2	-	41,5
CONSOMMATEURS DE TABAC *(à fumer et sans fumée)*			
Consommateurs actuels de tabac	11,0	1,2	6,0



SEVRAGE TABAGIQUE

	HOMMES (%)	FEMMES (%)	ENSEMBLE (%)
Fumeurs ayant essayé d'arrêter au moins une fois au cours des 12 derniers mois[4]	59,9	-	59,6
Fumeurs actuels ayant envisagé ou pensé arrêter de fumer	80,3	-	79,8
Fumeurs conseillés par un professionnel de santé d'arrêter de fumer au cours des 12 derniers mois[4,5]	51,9	-	50,9
Fumeurs ayant essayé d'arrêter sans assistance au cours des 12 derniers mois	85,6	-	86,0

TABAGISME PASSIF

	HOMMES (%)	FEMMES (%)	ENSEMBLE (%)
Adultes exposés à la fumée du tabac sur le lieu de travail[6,†]	33,0	25,1	30,4
Adultes exposés à la fumée du tabac au domicile au moins une fois par mois	24,5	19,0	21,6
Adultes exposés à la fumée du tabac dans les lieux publics suivants[7,†]:			
Bâtiments administratifs	26,8	20,3	24,2
Etablissements de santé	11,7	9,1	10,2
Restaurants	27,0	32,9	28,8
Transports publics	17,5	10,9	14,3
Universités	61,1	50,2	57,0
Etablissements scolaires	22,0	19,0	20,7

ÉCONOMIE

Dépense moyenne mensuelle en cigarettes par fumeur (en FCFA)	6 716
Adultes favorables à l'augmentation de la taxation sur les produits du tabac	95,5%

MÉDIA

PUBLICITE DE L'INDUSTRIE DU TABAC	FUMEURS ACTUELS (%)	NON-FUMEURS (%)	ENSEMBLE (%)
Adultes ayant remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes dans les magasins où elles sont vendues[9,†]	20,8	9,6	10,2
Adultes ayant remarqué de la publicité/promotion des cigarettes (autre que dans les magasins) ou du parrainage des événements sportifs, culturels et artistiques.[†]	26,0	16,5	17,0
CONTRE PUBLICITÉ	**HOMMES (%)**	**FEMMES (%)**	**ENSEMBLE (%)**
Fumeurs actuels ayant envisagé arrêter en raison d'une mise en garde sanitaire sur les paquets de cigarettes[†]	31,9	-	31,5
	FUMEURS ACTUELS (%)	**NON-FUMEURS (%)**	**ENSEMBLE (%)**
Adultes ayant remarqué des informations anti cigarette à la télévision ou la radio[† †]	45,1	41,4	41,6

CONNAISSANCES, ATTITUDES ET PERCEPTIONS

	FUMEURS ACTUELS (%)	NON-FUMEURS (%)	ENSEMBLE (%)
Adultes pensant que fumer peut entraîner des maladies graves	92,5	93,9	93,9
Adultes pensant que fumer provoque :			
Cancer du poumon	88,1	92,9	92,7
Crise cardiaque	71,9	71,3	71,3
Accident vasculaire cérébral (AVC)	66,1	67,8	67,7
Adultes pensant que respirer la fumée des autres provoque des maladies graves pour les non fumeurs	87,4	92,1	91,9
	CONSOMMATEURS DE TABAC SANS FUMEE (%)	**NON-CONSOMMATEURS (%)**	**ENSEMBLE (%)**
Adultes pensant que la consommation de tabac sans fumée provoque des maladies graves	74,5	79,1	79,0

[1] Inclut les cigarettes manufacturées et roulées à la main. [2] Non fumeurs actuels. [3] Non consommateurs. [4] Inclut les fumeurs actuels et ceux ayant arrêté au cours des 12 derniers mois. [5] Parmi ceux qui ont consulté un professionnel de santé au cours des 12 derniers mois. [6] Parmi ceux qui travaillent à l'extérieur de la maison, à l'intérieur ou les deux. [7] Parmi ceux qui ont visité les lieux publics au cours des 30 derniers jours. [8] PIB per capita de 2014 selon le site web du FMI consulté le 15 juin 2015. [9] Inclut ceux ayant remarqué les cigarettes à prix réduit, les cadeaux ou les promotions sur les autres produits lors de l'achat de cigarettes ou toute autre publicité ou affiche faisant la promotion des cigarettes dans les magasins où elles sont vendues. [†] Au cours des 30 derniers jours.

NOTE: La consommation actuelle fait référence à la consommation quotidienne et occasionnelle. Le terme « adulte » fait référence aux personnes âgées de 15 ans et plus. Les données ont été pondérées pour être représentatives des hommes et des femmes âgés de 15 ans et plus hors institutions spécialisées (résidant dans les ménages ordinaires) au niveau national. Les pourcentages reflètent la prévalence de chaque indicateur dans chaque groupe et non la distribution entre les groupes. Le tiret (--) indique les estimations basées sur moins de 25 cas non pondérés ont été supprimées.

Le support financier a été assuré par la Fondation Bill & Melinda Gates et l'Initiative de Bloomberg pour la réduction de l'usage du tabac. L'assistance technique a été apportée par le Center for Disease Control and Prevention (CDC) des États-Unis, l'Organisation mondiale de la Santé (OMS), le Johns Hopkins Bloomberg School of Public Health, et le RTI International. L'appui logistique a été fourni par la Fondation CDC.

Dernière mise à jour 01/10/2015

Document 4

(Document à remettre avec sa copie complété selon les directives figurant à l'exercice 3)

- Au Sénégal, ____ % de la population consomment actuellement du tabac avec ____ % des hommes et ____ % des femmes.

- ____ % de la population totale fument actuellement du tabac avec ____ % des hommes et ____ % des femmes.

- ____ % de la population totale utilise actuellement du tabac sans fumée avec ___ % des hommes et ____ % des femmes.

- ___ fumeurs actuels sur 10 ont envisagé d'arrêter de fumer ou y ont pensé.

- ___ fumeurs actuels sur 10 ont essayé d'arrêter de fumer sans assistance au cours des 12 derniers mois.

- ____ % des adultes ont été exposés à la fumée du tabac à l'intérieur de leur lieu de travail.

- ____ % des adultes ont été exposés à la fumée du tabac à domicile.

- ____ % des adultes ont été exposés à la fumée du tabac dans les restaurants.

- ____ % des adultes sont favorables à l'augmentation de la taxation des produits du tabac.

- ___ adultes sur 10 ont remarqué des informations anti cigarette à la télévision ou à la radio.

- ___ adulte sur 10 a remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes dans les magasins où elles sont vendues.

- ___ adultes sur 10 ont remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes (autre que dans les magasins) ou du parrainage des évènements sportifs, culturels et artistiques.

- ____ % des adultes pensent que fumer peut entraîner des maladies graves.

- ____ % des adultes pensent que respirer la fumée des autres provoque des maladies graves pour les non fumeurs.

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Partie 1

1) Le tableau de variation de *g* n'est pas fait ici. Mais on montre que la fonction g est décroissante sur R^- et croissante sur R^+ en étudiant la dérivée de la fonction *g.* On montre également que la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ est $+\infty$ et que *g*(0) = 1. En examinant le comportement de *g*(x)/x en $+\infty$, on constate que la courbe de *g* admet une branche parabolique d'axe (Oy). En examinant le comportement de *g*(x)/x en $-\infty$, on constate que la courbe de *g* admet la droite d'équation y = -x pour asymptote oblique.

2) La question précédente montre que la fonction *g* est continue et strictement monotone sur R^-. On a donc une bijection de R^- sur l'intervalle 1, $+\infty$. Comme par hypothèse, *n* est supérieur ou égal à 2, l'équation (En) admet une unique solution strictement négative notée r_n. Un raisonnement analogue sur R^+ conclut que l'équation (En) admet une unique solution strictement positive notée t_n

Partie 2

Dans cette partie, on note (u_n), *n* appartenant à l'ensemble des entiers naturels, la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ pour\ k \geqslant 1, u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

1) Pour montrer que $-2 \leq r_2 \leq -1$, il suffit de montrer que *g*(-1) est strictement inférieur à 2 et que *g*(-2) est strictement supérieur à 2 et utiliser la décroissance de la fonction *g* sur R^-. On rappelle que $g(r_2) = 2$

2) Evident que $e^{r_2} - 2 = r_2$ car $g(r_2) = 2$ .La récurrence n'est pas faite ici mais elle ne pose aucune difficulté (vraie au rang 0 du fait de la question précédente et passage du rang k au rang k+1 en utilisant le fait que la fonction exponentielle est croissante)

3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec la fonction exponentielle sur l'intervalle $-\infty$, -1. On montre le résultat cherché : pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$, $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b-a)$

4) En utilisant la question 2, on montre que pour tout entier naturel *k*, $u_{k+1} - r_2 = e^{u_k} - e^{r_2}$. On en déduit par récurrence que, pour tout entier naturel *k*, $0 \leq u_k - r_2 \leq (\frac{1}{e})^k$ (récurrence non faite ici mais qui ne pose aucune difficulté)

5) En utilisant l'encadrement obtenu à la question précédente, on montre que la limite de $u_k - r_2$ est nulle. Donc, la suite (u_n), *n* appartenant à l'ensemble des entiers naturels, est convergente et de limite r_2

Exercice 2

Partie 1

1) Les valeurs propres de A sont 0 et 1

2) Les vecteurs propres sont respectivement (1,0) et (1,1). La matrice P est : $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Partie 2

On note E l'ensemble des matrices carrées $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ d'ordre deux telles que AM = MD

1) La matrice nulle d'ordre 2 appartient à E et si on choisit M et N deux éléments de E et k un réel, kM+N est un élément de E. On en déduit que E est un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

2) Evident

3) Evident en montrant que U et A forment une famille génératrice de E et que cette famille est libre

4) $UA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ Cette matrice n'est pas de la forme trouvée à la question 2, donc ce n'est pas un élément de E

Partie 3

On note *f* : $M_2(\mathbb{R})\rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout M appartenant à $M_2(\mathbb{R})$, par : *f* (M) = AM – MD

1) Pour toutes matrices M et N de $M_2(\mathbb{R})$ et pour tout réel k, on montre que

f (kM+N) = k *f*(M) + *f*(N) donc *f* est linéaire

2) Le noyau de *f* est E et sa dimension est donc 2 (question 3 de la partie 2)

3) D'après le théorème du rang, la dimension de l'image de *f* est 2

4) Les matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ telles que *f* (M) = M sont de la forme $\begin{pmatrix}x & 0\\ x & 0\end{pmatrix}$.

Il existe donc au moins une matrice non nulle, par exemple la matrice $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ qui vérifie *f* (M) = M . Ceci montre que 1 est valeur propre de *f.* La dimension de l'espace propre associé est 1.

Pour montrer que -1 est valeur propre de *f*, on procède de même en cherchant les matrices telles que *f* (M) = - M, on trouve qu'elles sont de la forme $\begin{pmatrix}0 & y\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Il existe donc au moins une matrice non nulle, par exemple la matrice $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ qui vérifie *f* (M) = - M . Ceci montre que -1 est valeur propre de *f.* La dimension de l'espace propre associé est 1.

5) D'après les questions précédentes, *f* admet trois valeurs propres : 0, 1 et -1 et la somme des dimensions des sous espaces vectoriels associés est de 4, c'est à dire la dimension de $M_2(\mathbb{R})$. *f* est donc diagonalisable ?

6) On se place dans la base composée par (U, A, B, C), la matrice de f dans cette base est

$$T=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

En partant de cette matrice, on montre aisément que $T^3 = T$, donc *f o f o f = f*

Exercice 3

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité *p*, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité *1-p*, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après *n* transmissions soit correcte.

1) On note In l'évènement « l'information après n transmissions est correcte ». D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1})=P(I_{n+1}|I_n)P(I_n)+P(I_{n+1}|\bar{I}_n)P(\bar{I}_n)$$

On sait que $P(I_{n+1}|I_n)=p$. On en déduit que $p_{n+1}=(2p-1)p_n+(1-p)$

2) La suite u_n est une suite géométrique de raison (2p-1), on en déduit que $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = 1/2$
3)On déduit que $p_n = 1/2 + 1/2(2p-1)^n$
4) On distingue 3 cas :
Si p = 1, $p_n = 1$
Si p = 0, $p_{2n} = 1$ et $p_{2n+1} = 0$
Si p est compris en 0 et 1, la suite p_n converge vers 1/2

Exercice 4

la fonction *f* s'écrit : $f(x)=\ln 2+\ln(1+x+x^2/2)$. En posant $u=x+x^2/2$ et en utilisant le développement limité à l'ordre 3 de la fonction logarithme en 0 : $\ln(1+u)=u-u^2/2+u^3/3+o(u^3)$

on obtient $f(x)=\ln 2+x-x^3/6+o(x^3)$

La courbe représentative de *f* admet donc au point (0,ln2) une tangente d'équation y = ln2 + x. De plus, $f(x)-(\ln 2+x)=-x^3/6+o(x^3)$ nous permet de dire que la courbe traverse sa tangente en (0,ln2) car cette différence est positive au voisinage de 0^- et négative au voisinage de 0^+

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGE D'ÉCONOMIE

Sujet 1 :

Les marchés maximisent-ils le bien-être social ?

Il s'agit d'une dissertation à propos de la microéconomie, avec une possibilité d'avoir une approche en termes d'histoire de la pensée économique. Peu importe la réponse défendue par les candidats, l'important est que la dissertation soit problématisée, et les arguments étayés par des éléments de théorie économique ou des exemples de faits économiques concrets.

Éléments de réponse et proposition de corrigé :

Introduction : (accroche) Sous le consensus de Washington (années 1990-2000), le FMI et la Banque Mondiale ont cherché à imposer des réformes libérales pour déréglementer les marchés des pays en développement. Mais libérer les marchés entraîne-t-il nécessairement l'augmentation de la satisfaction de la population ?
(éléments d'histoire de la pensée) L'utilitarisme, qui est le fondement philosophique de l'économie néoclassique, remonte à Jeremy Bentham et le « felicific calculus » (calcul du bonheur). Le flambeau a été repris par John Stuart Mill. L'idée de maximisation a été introduite par les marginalistes en économie, révolution néoclassique avec sa théorie de la valeur-utilité (qui vient remplacer la théorie de la valeur-travail des classiques), qui vient mettre le bien-être (utilité) au centre de l'analyse. L'économie néoclassique reste le courant dominant au début du XXIè siècle, comme en témoigne par exemple le consensus de Washington cité plus haut. Néanmoins, les résultats contrastés de ces programmes amènent à mettre en question l'effet des libres marchés sur le bonheur social.
(problématique) ***Sous quelles conditions les marchés maximisent-il le bien-être ? Ces conditions sont-elles généralement vérifiées ? Que peut faire l'État pour améliorer la situation ? L'utilité est-elle la bonne mesure du bien-être ?***

I) D'après la théorie néoclassique, le libre marché concurrentiel maximise le bien-être social

A) Les théorèmes de l'économie du bien-être

(éléments d'histoire de la pensée : on peut développer la théorie de l'équilibre général de Walras ; optimum de Pareto : première génération de marginalistes)
Les théorèmes de l'économie du bien-être ont été démontrés par Arrow et Debreu, continuateurs du courant néoclassique au milieu du XXè siècle.
Premier théorème : l'équilibre général est un optimum de Pareto
(illustration possible : boîte d'Edgeworth).
Deuxième théorème : il suffit de modifier les dotations initiales pour obtenir n'importe-quel optimum de Pareto.
Ainsi, d'après la théorie néoclassique, les marchés libres et concurrentiels produisent toujours un équilibre général walrasien socialement optimal. Le marché maximise donc le bien-être social.

B) Toute intervention sur le marché a des effets pervers

En outre, dans la théorie néoclassique, toute entrave au libre fonctionnement du marché réduit le surplus social.
(Proposition d'illustration : schéma d'un marché microéconomique ; le surplus du consommateur et du producteur est maximisé lorsqu'on laisse le marché atteindre l'équilibre ; si l'État intervient par exemple en plafonnant les prix cela entraîne une perte sèche, du rationnement).
Le marché laissé à la libre-concurrence est le meilleur moyen de réaliser tous les échanges mutuellement avantageux, et donc maximiser le bien-être social.

II) Le marché n'est pas exempt d'échecs

(partie « critique interne » de l'économie néoclassique, c'est à dire arguments appartenant au même cadre théorique)
Il peut y avoir des « échecs du marché » (market failures). Il y a des cas où la libre-concurrence laissée à elle-même produit des effets pervers.

A) L'exemple du monopole

Le monopole qui n'est pas régulé ne maximise pas le bien-être social. On peut faire un schéma (monopole qui maximise son profit versus monopole contraint par l'état ; on voit que dans le second cas le surplus social est maximisé) ; et/ou prendre un exemple concret d'entreprise monopolistique

B) L'exemple des externalités

Les externalités arrivent lorsque la transaction entre des agents A et B (consentants à la transaction) a un effet négatif sur l'agent C (qui n'a rien demandé). L'exemple typique est la pollution. Par exemple, la libre offre et demande de pétrole et de charbon entraînent une quantité élevée d'émissions de CO2 qui affecte même les personnes ne consommant ni pétrole ni charbon. On peut ici développer des exemples concrets d'externalités (contamination des eaux etc)

C) L'exemple des biens publics

Les biens publics sont communs (si A en profite, cela ne diminue pas la satisfaction que B en tire) et non excludables (il est impossible d'empêcher C d'en profiter aussi). Exemples : un phare, un feu d'artifice etc. Si le marché est laissé à lui-même cela va entraîner un comportement opportuniste : pour chaque individu, il est optimal de profiter du bien public tout en ne payant pas. Au niveau collectif, si personne ne paie, le bien public disparaît (c'est la tragédie des communs). Encore une fois, le marché produit une situation qui n'est pas satisfaisante ; l'intervention publique est nécessaire.

D) Le théorème d'incompatibilité d'Arrow

En réalité il est impossible d'agréger des préférences individuelles pour en déduire une fonction de préférences sociale.

III) Le paradigme utilitariste est critiquable à beaucoup de niveaux

(partie « critique externe» de l'économie néoclassique, c'est à dire arguments remettant complètement en cause ce courant théorique)

A) L'utilité est une mauvaise mesure du bien-être

Toute l'économie néoclassique prétend que le bien-être correspond à l'utilité. En fait, l'utilité est un concept très abstrait, qui n'est même pas mesurable dans la réalité. Le bonheur est peut-être social (famille, communauté politique etc) plutôt qu'une question de préférences individuelles. De plus, tous les agents ne sont pas maximisateurs.

B) Le bilan des politiques de la marchéisation est critiquable

On peut faire des développements sur l'exploitation des matières premières en Afrique. Les marchés des matières premières ressemblent aux marchés de la microéconomie (produits identiques, prix flexibles etc), pourtant, les marchés ne sont peut-être pas le bon angle pour analyser le bien-être. Peut-être se focaliser sur les entreprises qui exploitent les ressources naturelles permet-il de mieux cerner les questions de bien-être : les travailleurs dans les mines/plantations de café et cacao en Afrique reçoivent une faible part de ces richesses, alors même que le marché est concurrentiel !

On peut aussi interroger la pertinence du concept d'optimum de Pareto : certes, prendre 1€ au PDG d'Areva va réduire son bien-être, mais doit-on prendre cela en compte lorsqu'on considère la misère des mineurs d'uranium au Niger ?

Conclusion (le/la candidate peut défendre son opinion, ici un exemple)
Les libres marchés ont produit de nombreux problèmes environnementaux. Des politiques d'internalisation des externalités environnementales sont nécessaires. De plus, du point de vue de la justice sociale, on peut se focaliser sur le deuxième théorème de l'économie du bien-être : la répartition des dotations est peut-être plus importante au niveau du bien-être global que la concurrence parfaite...
Enfin (ouverture sur la macro) au niveau macréoconomique, les marchés ne se rééquilibrent pas, comme l'a montré John Maynard Keynes. L'intervention publique est donc nécessaire à la survie du capitalisme.

Sujet 2 :

1) Exercice de micréoconomie (7 points)

Le marché des bouteilles en verre du pays Justan est caractérisé par 100 entreprises en concurrence pure et parfaite qui ont toutes la même fonction de coût qui est la suivante : $C = 10 + 0{,}5\ Q^2 + 4\ Q$.
La fonction de demande totale pour les bouteilles en verre est la suivante : $Q = 300 – 20\ P$.

1) Donnez la fonction d'offre (Q en fonction de P) d'une firme.

Il faut prix = coût marginal.
P = dC/dQ donc on a P = Q + 4 ou encore ***Q = P – 4***

2) Déduisez-en la fonction d'offre de l'ensemble du marché.

Il y a 100 firmes donc au niveau du marché ***Q = 100 P – 400***

3) Calculez la quantité et le prix d'équilibre sur ce marché.

Il faut offre = demande, ce qui implique P = 5,83 (en arrondissant) et Q = 188,4.

4) Donnez les profits (ou pertes) de chaque entreprise.

Toutes les entreprises étant identiques, chacune produit 1/100ème de Q, c'est à dire 1,844.
*Profit = recettes – coûts = 5,83*1,844 – (10 + 0,5 (1,844)^2 + 4*1,844)*
On obtient : chaque entreprise fait une perte de -8,33 (en arrondissant)

L'entreprise Topbouteille est en position de monopole sur le marché des bouteilles en verre du pays Juiceland. Elle paie un loyer de 300 000 pour le terrain et les équipements qu'elle utilise (ce sont ses seuls coûts fixes).
Sa fonction de coûts variables est donnée par la formule suivante : $CV = Q^2$.
L'entreprise Topbouteille fournit la totalité des producteurs de jus d'orange du pays. Leur demande pour les bouteilles suit la fonction suivante : $Q = 350 – 0{,}25\ P$.

5) Quelle(s) propriété(s) du coût total en fonction de la quantité, font de Topbouteille une entreprise monopolistique ?

Les coûts fixes sont très élevés. Il y a donc des rendements croissants.

6) L'entreprise maximise son profit. Quelles sont la quantité et le prix d'équilibre ?

En posant recettes = PQ et en y insérant l'expression de P en fonction de Q déduite de la fonction de demande pour avoir la recette totale, et ensuite en dérivant pour obtenir la recette marginale,

et en posant coûts = coûts fixes + coûts variables et en dérivant pour obtenir le coût marginal,
On pose recette marginale = coût marginal, et on trouve P = 840 et Q = 140

7) Calculez le profit. L'entreprise Topbouteille est-elle un monopole naturel ?

Les recettes de Topbouteille sont 117600. Ses coûts sont 319600. Les coûts fixes sont tellement importants que même en étant en monopole Topbouteille fait des pertes. C'est donc un monopole naturel.

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Dans un pays, les ménages consomment $C = C_0 + c(Y\text{-}T)$
L'État lève des impôts T et dépense un montant G_0.
Les entreprises investissent un montant I_0.

1) Écrivez le total de la demande globale.

$Yd = C + I + G = C_0 + c(Y\text{-}T) + I_0 + G_0$

2) Expliquez en quoi la fonction de consommation est keynésienne (expliquez C_0 et c).

La consommation dépend du revenu disponible courant (la partie c(Y-T) de la fonction) (+ composante autonome)

3) Exprimez le multiplicateur d'investissement

$\Delta Y/\Delta I = k = 1/(1-c)$

4) Exprimez le multiplicateur fiscal. Pourquoi est-il négatif ?

$\Delta Y/\Delta T = l = -c/(1- c)$

Une baisse des impôts stimule la demande, c'est logique.

5) Sachant que $0 < c < 1$, comparez ces deux multiplicateurs et expliquez pourquoi l'un est plus élevé en valeur absolue que l'autre.

$|k| > |l|$ en effet l'épargne n'est pas affectée par le multiplicateur fiscal, il y a une fuite dans le circuit.

On pose $c = 0{,}7$; $C_0 = 60$; $T_0 = 40$; $I_0 = 70$ et $G_0 = 85$

6) Calculez Y

En utilisant la formule exprimée en question (1), on trouve Y = 5610

7) Calculez le solde budgétaire G-T. D'un point de vue keynésien, le signe de cette valeur est-il une bonne chose ?

G-T = 45. Déficit budgétaire. Pour les keynésiens ce n'est pas un problème. Au vu du multiplicateur budgétaire et fiscal, un déficit public a des effets bénéfiques. Une hausse du PIB grâce au déficit permet la hausse des dépenses fiscales en retour.

3) Questions (6 points)

1) Expliquez la **théorie de la valeur-travail**, et mentionnez le courant de pensée auquel elle appartient ainsi que ses trois principaux auteurs.

Cette théorie stipule que la valeur vient du travail qui a été nécessaire pour produire un bien. Par exemple, s'il faut trois plus d'heures pour chasser un daim qu'un castor, le daim doit valoir trois castors (exemple de Smith). Les deux autres auteurs sont Ricardo et Marx. On les appelle les classiques.

2) Qu'est-ce que la courbe de Phillips ?

C'est une courbe qui représente la relation inverse entre l'inflation et le chômage. Au départ simple observation empirique, elle a été analysée par de nombreux courants théoriques.

3) Dans quels buts un pays peut-il dévaluer sa monnaie ?

Dévaluer sa monnaie permet d'augmenter sa compétitivité-coût et donc augmenter ses exportations et favoriser la croissance. En changes fixes, il suffit aux autorités monétaires d'abaisser le taux de change.

[En changes flexibles, on ne parle pas vraiment de dévaluation mais la banque centrale du pays (ou de la zone monétaire) peut émettre de la monnaie (par exemple en achetant des titres) afin d'augmenter l'offre et donc de faire baisser son cours]

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Exercice 1

1) Le glissement trimestriel entre le 3ème trimestre 2014 et le second trimestre 2014 de l'indice global est de +1 % (133,4/132,1 - 1)

2) Le glissement annuel entre le 3ème trimestre 2014 et le 3ème trimestre 2013 de l'indice global est de +3,3 % (133,4/129,1 - 1)

3) Pas de corrigé type : une méthode graphique ou un calcul de régression conviennent. On peut par exemple regarder le graphique fourni en bas de page et constater que le 1er trimestre est souvent plus fort que les autres trimestres les dernières années, notamment le chiffre du 4ème trimestre de l'année précédente (c'est vrai en 2012, 2013 et 2014). Sachant que l'indice global du 4ème trimestre 2014 est de 140,0, on peut s'attendre à un chiffre supérieur à celui-ci sans pour autant qu'il explose, donc entre 140 et 145.

4) L'indice global est structurellement en hausse puisqu'il a été multiplié par deux sur la période examinée (un peu plus de 14 ans). On pourrait essayer de trouver le lien entre le temps et la valeur de l'indice en utilisant le coefficient de corrélation.

Exercice 2

1) La somme des pondérations devrait être 10.000 alors que si on somme les pondérations des postes 01 à 12, on trouve 9999.
De même, si on somme les sous-postes du 01 « produits alimentaires et boissons non alcoolisées », on trouve un poids de 4907 au lieu de 5100.

2) L'indice national des prix à la consommation du mois de juin a enregistré une hausse de 0,1% par rapport au mois précédent et une hausse de 2,4 % sur un an. Cette hausse résulterait des variations enregistrées par certaines fonctions entre les mois de mai et juin 2017. Compte tenu de leurs poids respectifs, il s'agirait principalement des fonctions « logement, eau, gaz, électricité et autres combustibles » (+0,1%), « communication » (+3,9%), « articles d'habillement et chaussures » (+0,4%) et « santé » (+0,4%).

Exercice 3

- Au Sénégal, 6,0 % de la population consomment actuellement du tabac avec 11,0% des hommes et 1,2% des femmes.

- 5,4% de la population totale fument actuellement du tabac avec 10,7% des hommes et 0,4 % des femmes.

- 0,7% de la population totale utilise actuellement du tabac sans fumée avec 0,3% des hommes et 1,0% des femmes.

- 8 fumeurs actuels sur 10 ont envisagé d'arrêter de fumer ou y ont pensé.

- 9 fumeurs actuels sur 10 ont essayé d'arrêter de fumer sans assistance au cours des 12 derniers mois.

- 30,4% des adultes ont été exposés à la fumée du tabac à l'intérieur de leur lieu de travail.

- 21,6% des adultes ont été exposés à la fumée du tabac à domicile.

- 28,8% des adultes ont été exposés à la fumée du tabac dans les restaurants.

- 95,5% des adultes sont favorables à l'augmentation de la taxation des produits du tabac.

- 4 adultes sur 10 ont remarqué des informations anti cigarette à la télévision ou à la radio.

- 1 adulte sur 10 a remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes dans les magasins où elles sont vendues.

- 2 adultes sur 10 ont remarqué de la publicité/promotion sur les cigarettes (autre que dans les magasins) ou du parrainage des évènements sportifs, culturels et artistiques.

- 93,9% des adultes pensent que fumer peut entraîner des maladies graves.

- 91,9% des adultes pensent que respirer la fumée des autres provoque des maladies graves pour les non fumeurs.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : Les quatre exercices proposés sont indépendants.**

Exercice 1

Partie 1

- On note $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

- On note $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

- On note S_2 l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2, de la forme $\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}$ avec *a*, *b*, *c* réels.

Question 1

Calculer les produits AFA, AGA, AHA en fonction de *F, G* et *H*

Question 2

Montrer que S_2 est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et que *(F, G, H)* est une base de S_2 . Déterminer la dimension de S_2

Question 3

On note *u* l'application qui à chaque matrice *S* de S_2 , associe la matrice $u(S) = ASA$

a) Montrer que $\forall S \in S_2, u(S) \in S_2$

b) Montrer que *u* est un endomorphisme de l'espace vectoriel S_2

c) Donner la matrice de *u* dans la base *(F, G, H)* de S_2

Partie 2

- On note $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&4&6\\4&12&9\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}$

Question 1

Vérifier que -4, 1 et 16 sont des valeurs propres de M et déterminer, pour chacune de celles-ci une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?

Question 2

Vérifier que $(D + 4I)(D - I)(D-16I)$ est la matrice nulle

Question 3

En déduire que $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$

Question 4

Etablir que $u^3 = 13u^2 + 52u - 64e$, ou e désigne l'application identité de S_2

Exercice 2

Pour $n\in\mathbb{N}, n\neq 0$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x+2x^2+3x^3+....+nx^n=\sum_{k=1}^{n} k\,x^k$$

Question 1

Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n

Question 2

Calculer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$

Question 3

Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Question 4

Montrer que la suite (u_n) est convergente

Question 5

Montrer que $f_n(x)=x\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

Question 6

Calculer u_2 . En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n)^n$

Question 7

Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 3

Trouver un équivalent, au voisinage de 2, de l'expression

$$y=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}-\frac{3}{2}$$

Exercice 4

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à p, $p\in]0,1[$

Soit N un entier naturel non nul fixé, on effectue N lancers du dé. Si n est le nombre de « 6 » obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de « 6 » obtenus aux lancers du dé ;
- X est le nombre de « piles » obtenus aux lancers de la pièce ;
- Y est le nombre de « faces » obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

Question 1

Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance

Question 2

Pour $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X=k/Z=n)$

On distinguera les cas $k\leqslant n$ et $k>n$

Question 3

Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$Si\ \ 0\leqslant k\leqslant n\leqslant N\ \ alors\ \ P(X=k\,et\,Z=n)\ =\ \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$Si\ \ n>N\ \ ou\ \ si\ \ k>n\ \ alors\ \ P(X=k\,et\,Z=n)\ =\ 0$$

Question 4

Calculer la probabilité $P(X=0)$

Question 5

Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $Si\ \ 0\leqslant k\leqslant n\leqslant N$, on a

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n}\ =\ \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

Question 6

En déduire la probabilité $P(X=k)$

Question 7

Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(N,\frac{p}{6}\right)$

Question 8

Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment interpréter la maxime *« Un esprit sain dans un corps sain »* ?

Sujet n° 2

Le continent africain est le mieux placé en matière de parité selon une étude[1] qui dresse le panorama du leadership au féminin à travers le monde. Illustrez ce constat et ses effets.

[1] Etude *« women in business 2018 »* publiée par le cabinet Grant Thornton.

Sujet n° 3

Explicitez la citation de Nelson Mandela, homme d'Etat sud-africain, (1918-2013) *« Être libre, ce n'est pas seulement se débarrasser de ses chaînes ; c'est vivre d'une façon qui respecte et renforce la liberté des autres ».*

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ÉCONOMIE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet 1

« La croissance en Afrique subsaharienne est-elle créatrice d'emplois ? »

Sujet 2

1) **Exercice de microéconomie (7 points)**

Un bien Q est produit à l'aide de deux facteurs de production, le travail (L) et le capital (K). A court terme, l'entreprise n'a pas la possibilité de changer son stock de capital. La production varie donc en fonction du nombre d'unités de facteur L (une unité de L correspond à une heure de travail ouvrier). La production réalisée est présentée dans le tableau ci-dessous :

Unités de travail L	Unités Produites Q
0	0
1	64
2	224
3	432
4	640
5	800
6	864
7	864
8	784

1- Calculez les valeurs de la productivité totale, la productivité moyenne et la productivité marginale de l'exemple proposé.

2- Donnez la représentation graphique des diverses courbes de productivité.

3- Quelle est la productivité horaire lorsque $L = 4$ et lorsque $L = 6$?

4- Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive ? négative ? nulle ?

5- La valeur de la productivité marginale du facteur travail varie lorsque le nombre d'heures augmente. En vous appuyant sur l'exemple, montrer quel est le lien qui peut être établi entre la valeur et le sens de l'évolution de la productivité marginale du travail et ceux de la productivité totale ?

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Soit une économie imaginaire dans laquelle sont appliqués les principes keynésiens :

Y = revenu national, C = consommation nationale, I = investissement national

Les comportements de l'économie étudiée sont caractérisés par les équations suivantes :

$$C = cY + Co$$

$$I = I_0$$

$Co = 100$ milliards de la monnaie de ce pays, $c = 0.75$ et $Io = 10$ milliards.

1- Calculez le revenu national d'équilibre Y_e.

2- I_0 passe de 10 milliards à 20 milliards, quantifiez l'effet sur le revenu d'équilibre.

3- Calculez la valeur du multiplicateur d'investissement *k*.

4- On raisonne à nouveau à partir de l'équilibre initial et on suppose désormais que l'Etat intervient dans l'économie. Les relations macroéconomiques de ce secteur institutionnel sont décrites par :

$$G = 5 \text{ et } T = 0.2Y + 4$$

Déterminez le revenu d'équilibre macroéconomique dans cette économie.

5- On suppose une augmentation de 20% des dépenses publiques. Déterminez la valeur du nouvel équilibre induite par l'augmentation des dépenses publiques et en déduire la valeur du multiplicateur de dépenses publiques.

3) Questions (6 points)

a- Quelle est la différence entre un oligopole et une situation de concurrence monopolistique ?

b- Comment est calculée l'inflation ?

c- Quels sont les enjeux macroéconomiques de l'investissement ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

***Attention** : le tableau 2 est à recopier et à compléter sur votre copie. Sinon, il vous faudra rendre ce document.*

La société anonyme HAPI est spécialisée dans la vente d'appareils ménagers. Le dépannage des appareils en atelier est sous-traité à une entreprise extérieure non connue du client dans la mesure où la société HAPI a un service après-vente (S.A.V.) auquel s'adresse directement le client. Chaque intervention du S.A.V. donne lieu à l'envoi d'une fiche d'évaluation au client.

Le directeur de la qualité de HAPI a décidé de faire faire une étude sur les prestations du S.A.V. d'une des succursales. Un échantillon de 600 fiches d'intervention est prélevé sur les interventions sur des réfrigérateurs, dans le courant du premier trimestre 2016. Les tableaux 1 et 2 fournissent certains résultats de cette étude. Les informations relatives aux clients n'ayant pas retourné la fiche ont été obtenues par relance téléphonique.

Question n°1

Il vous est demandé, tout d'abord, d'analyser et de commenter le tableau 1 relatif au niveau de satisfaction des clients ayant demandé une réparation de réfrigérateur. Pour ce faire, il vous est suggéré d'analyser la dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation en complétant le tableau 2 et de commenter les résultats.

Tableau 1

Niveau de satisfaction des clients ayant demandé

une réparation de réfrigérateur

Clients	très satisfaits	satisfaits	peu ou pas satisfaits	Total
ayant retourné la fiche	333	75	42	450
n'ayant pas retourné la fiche	117	30	3	150
Total	450	105	45	600

Tableau 2

(à compléter)

	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**
	n_i	p_i	np_i	$(n_i\text{-}np_i)$	$(n_i\text{-}np_i)^2$	**(5)/(3)**
1	333	0,56250	337,5	-4,5	20,25	0,06
2	75	0,13125	78,75	-3,75	14,0625	0,18
3	42	0,05625				
4	117	0,18750	112,5	4,5	20,25	0,18
5	30	0,04375				
6	3	0,01875	11,25	-8,25	68,0625	6,05
Total	600	1,00000	600			

Afin de vous aider à conclure le test, il vous est proposé de comparer la valeur totale obtenue en colonne 6 avec la valeur 5,99. Si la valeur trouvée est supérieure à 5,99 il faut en conclure qu'il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation.

Question n°2

Sur les 600 interventions du S.A.V., 150 sont classés comme mineures parce qu'ayant entraîné un temps de réparation n'excédant pas une heure. Pour les autres, qualifiées de majeures, 35 d'entre elles ont pu être effectuées sur place et 215 ont été réparées en atelier. On ne s'intéressera, ici, qu'aux interventions majeures. Le nombre de jours qui séparent la date d'arrivée du technicien de celle du retour possible de l'appareil (la livraison pouvant être différée à la demande du client pour raison de convenance personnelle) est donné dans le tableau 3 et sera appelé « durée d'une réparation majeure ».

Tableau 3

Distribution des durées d'une réparation majeure

i		1	2	3	4	5	6	7	8	Total
x_i	Durée (en jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	
n_i	Nombre de réfrigérateurs	35	70	66	44	22	10	2	1	250

Il vous est demandé de calculer la moyenne et la variance de la durée d'une réparation majeure.

Question n°3

Pour suivre l'évolution de la demande, le S.A.V. calcule, à la fin de chaque trimestre, le nombre total d'interventions majeures supérieures à 3 jours, au cours des douze mois qui viennent de s'écouler (ce qui permet d'éliminer l'incidence de la saisonnalité).

A partir des informations du tableau 4, il vous est demandé de fournir une prévision pour l'année civile 2019 en justifiant votre démarche.

Tableau 4

Nombre d'interventions des douze derniers mois

(données fin de trimestre)

	2016				2017				2018	
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
Nombre d'interventions	1320	1350	1370	1400	1390	1380	1420	1410	1430	1440

Question n°4

A partir du tableau 4, il vous est demandé de donner le nombre d'interventions supplémentaires entre le deuxième trimestre 2015 et le deuxième trimestre 2018.

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Partie 1

Question 1

$AFA = 4H$

$AGA = 4G + 12H$

$AHA = 4F + 6G + 9H$

Question 2

Les matrices symétriques sont de la forme aF + bG + cH avec a, b, c réels

donc $S_2 = Vect(F, G, H)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$

La famille *(F, G, H)* est libre (démonstration évidente) donc c'est une base de S_2

$Dim(S_2) = 3$

Question 3

a) $u(S) = \begin{pmatrix} 4c & 4b+c \\ 4b+6c & 4a+12b+9c \end{pmatrix}$, matrice symétrique donc

$$\forall S \in S_2, u(S) \in S_2$$

b) évident

c) La question 1 nous donne le résultat $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

Partie 2

- On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

Question 1

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$, pour montrer que -4 (respectivement 1 et 16) est une valeur propre de M, il faut montrer que le *vecteur nul* n'est pas la seule solution de l'équation *(D + 4I) v = vecteur nul,* (respectivement *(D – I)v* et *(D-16I)v*). La recherche des vecteurs propres s'obtient de la même façon, en trouvant les solutions de l'équation *(D + 4I) v = vecteur nul,* (respectivement *(D – I)v* et *(D-16I)v*).

A chacune des valeurs propres, on trouve un sous espace de dimension 1 engendré, par exemple :

Pour la valeur -4, par le vecteur (-4, -3, 4)

Pour la valeur 1, par le vecteur (4, -2 , 1)

Pour la valeur 16, par le vecteur (1, 2, 4)

La matrice *M* est donc diagonalisable

Question 2

Evident en calculant *(D + 4I)(D – I)(D-16I)*

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3

En développant l'expression *(D + 4I)(D – I)(D-16I)=0*, on obtient $D^3 = 13D^2 + 52D - 64I$ (question 2). On sait que si *M* est diagonalisable, il existe une matrice *P* tel que $M = PDP^{-1}$. Avec ces deux éléments, on obtient le résultat recherché donc $M^3 = 13M^2 + 52M - 64I$

Question 4

En utilisant le fait que l'application linéaire associée à *M* dans la base *(F, G, H)* est *u* (question 3c de la partie 1), on obtient le résultat.

Exercice 2

Question 1

La fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$f'_n(x) = 1+4x+9x^2+....+n^2x^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} k^2x^{k-1}$$

Par construction, la fonction $f'_n(x) > 0 \; pour \; x \geq 0$. La fonction f_n est donc strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[f_n(0), \lim_{x \to +\infty} f_n[$

Comme $f_n(0) = 0$ et que $f_n(x) > x \to +\infty \; quand \; x \to +\infty$, la fonction est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

Cela signifie que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution et que celle-ci est unique

Question 2

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+(n+1)x^{n+1}$$

Question 3

2

En utilisant la question 2, on a :

$f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+(n+1)(u_n)^{n+1}$

comme $f_n(u_n)=1$, et que $(u_n)\geq 0$, on montre ainsi que $f_{n+1}(u_n)\geq 1$

comme $f_{n+1}(u_{n+1})=1$, on a $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$

La fonction f_n étant strictement croissante (question 1), $u_n\geq u_{n+1}$

Ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante

Question 4

La suite (u_n) est décroissante (question 3) et minorée par 0, elle est donc convergente

On note L sa limite positive ou nulle

Question 5

On montre le résultat par récurrence $f_n(x)=x\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

- Pour n = 1, c'est évident $f_1(x)=x$

- Supposons la formule vraie au rang n et montrons qu'elle est encore vraie au rang n+1 calcul non présenté ici mais qui ne pose aucun problème

Question 6

$u_2=1/2$

La suite (u_n) étant décroissante, on sait que la limite L est inférieure à 1/2

En utilisant le fait que $0\leqslant u_n\leqslant 1/2$, on trouve $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}n(u_n)^n=0$

Question 7

En utilisant la formule obtenue à la question 5, on a

$$f_n(u_n)=u_n\frac{1-(n+1)(u_n)^n+n(u_n)^{n+1}}{(1-u_n)^2}$$

En utilisant les résultats de la question 6, on montre que

$$f_n(u_n)\ \to\ \frac{L}{(1-L)^2}$$

Comme $f_n(u_n)=1$, la limite L est solution de l'équation $\dfrac{L}{(1-L)^2}=1$, équation du second degré ($L^2-3L+1=0$). A la question 6, on a montré que la limite L était comprise entre 0 à 1/2, la seule solution de l'équation du second degré acceptable est donc

$$L=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}$$

Exercice 3

En effectuant un changement de variable pour ramener l'étude au point zéro afin d'utiliser les développements limités connus (u = x-2), on obtient comme équivalent du numérateur N et du dénominateur D :

$$N = 2\left(\frac{u}{8} - \frac{u^2}{8x16} + u^2\varepsilon(u)\right)$$
$$D = 3\left(\frac{u}{18} - \frac{u^2}{8x81} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

Ensuite, on trouve que la fonction y qui est égale à N/D - (3/2) a comme équivalent -5u/96 avec u = x - 2

Exercice 4

Question 1

Z est le nombre de 6 obtenus en *N* lancers indépendants avec une probabilité de 1/6 d'obtenir le chiffre 6. La variable *Z* suit donc une loi binomiale de paramètres (*N*,1/6).

E(*Z*) = *N*/6 et V(*Z*) = 5*N*/36

Question 2

Quand *Z* = *n*, on effectue *n* lancers indépendants de la pièce. La variable *X* suit une donc une loi binomiale de paramètres (*n*,*p*) lorsque $k \leqslant n$

Pour $k > n$, la probabilité est nulle.

Question 3

$Si\ n > N\ ou\ si\ k > n\ alors\ P(X = k\, et\, Z = n) = 0$, évident car l'un des deux événements $(X = k)\ ou\ (Z = n)$ est impossible

$Si\ 0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N\ alors\ P(X = k\, et\, Z = n) = P(Z = n)\ P(X = k\, sachant\, Z = n)$ En utilisant le résultat de la question 2, on obtient le résultat attendu

Question 4

Pour la probabilité $P(X = 0)$, on utilise le fait que le résultat que cela dépend de *Z* et en utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements *Z*, on a :

$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{N} P(Z = n)\ P(X = 0\, sachant\, Z = n)$ ce qui donne, en développant, et en

utilisant que $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (a)^i (b)^{n-i}$

$$P(X = 0) = \left(\frac{5+q}{6}\right)^N$$

Question 5

Evident en développant les deux parties

Question 6

Pour calculer $P(X=k)$, comme pour la question 4, on utilise le fait que le résultat que cela dépend de Z et en utilisant la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements Z, on a :

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{N} P(Z=n)\ P(X=k\,sachant\,Z=n) \quad \text{ce qui donne}$$

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{k-1} P(Z=n)\ P(X=k\,sachant\,Z=n) + \sum_{n=k}^{N} P(Z=n)\ P(X=k\,sachant\,Z=n)$$

Les k premiers termes sont nuls du fait de la question 3 ($n<k$)

En utilisant la question 5, on peut écrire que :

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{N} P(Z=n)\ P(X=k\,sachant\,Z=n)=\sum_{n=k}^{N}\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

En posant $i = n-k$, on obtient

$$P(X=k)=p^k\ \binom{N}{k}\ \sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}(1-p)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i}\ \left(\frac{1}{6}\right)^{k+i}$$

$$P(X=k)=p^k\ \binom{N}{k}\ \left(\frac{1}{6}\right)^k\ \sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\left(\frac{1-p}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\ \left(\frac{p}{6}\right)^k\ \left(\frac{5+1-p}{6}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\ \left(\frac{p}{6}\right)^k\ \left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

Question 7

Le résultat de la question 6 montre que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $\left(N,\frac{p}{6}\right)$

Question 8

En inversant « pile » et « face », on obtient que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $\left(N,\frac{q}{6}\right)$

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGE DE L'EPREUVE D'ÉCONOMIE

Sujet 1 :

« La croissance en Afrique subsaharienne est-elle créatrice d'emplois ? »

Les années 2000 ont marqué pour l'Afrique subsaharienne le retour de la croissance économique et une progression du revenu moyen de sa population. Entre 2000 et 2015, le PIB par tête a augmenté de plus de 2% par an avec une croissance économique qui a triplé par rapport à la décennie précédente. Avec la chute des prix des matières premières et notamment ceux du pétrole, la croissance s'est depuis nettement ralentie (chiffre 2016) mais pour l'année 2018 les perspectives sont en hausse avec une estimation du FMI de 3,1 % en 2018. En parallèle de ces statistiques de conjoncture économique, il convient également de souligner que l'Afrique subsaharienne connait toujours les taux de PIB par tête les plus faibles du monde et se classe parmi la région la plus vulnérable en termes d'indicateurs de développement. Les enjeux d'une croissance inclusive créatrice d'emplois se posent donc toujours avec acuité dans un contexte où le marché du travail est caractérisé par un très fort taux d'emplois informels (de 30 à 90% des emplois non agricoles selon le FMI), un chômage et un niveau de sous-emploi élevés surtout en ce qui concerne les jeunes et un niveau de productivité qui reste bas. Les défis qui sous-tendent les dynamiques de croissance en Afrique subsaharienne portent donc sur la création de davantage d'emplois au cours des prochaines années, d'améliorer leur qualité (productivité, conditions de travail, protection sociale) et enfin de connecter les travailleurs aux emplois afin de mettre fin à l'extrême pauvreté et promouvoir une prospérité partagée en lien avec les Objectifs du Développement Durable (ODD).

I- L'évolution de la croissance en Afrique subsaharienne

I.1- Les dynamiques récentes de la croissance

Evolution des PIB, PIB réels, revenus moyens (voir statistiques FMI, BM ou BAD)

https://www.imf.org/fr/Publications/REO/SSA/Issues/2018/09/20/sreo1018

I.2- Les enjeux actuels de la croissance en Afrique subsaharienne

Croissance inclusive et développement durable

ODD 8 : travail décent et croissance économique durable

https://www.un.org/sustainabledevelopment/fr/economic-growth/

II- Les défis d'une croissance inclusive créatrice d'emplois en Afrique subsaharienne

II.1- Les tendances de l'emploi en Afrique subsaharienne

Evolution des niveaux d'activité, secteurs créateurs d'emplois, chômage et sous-emploi, informel, niveaux de productivité (voir statistiques du BIT et du FMI)

https://www.imf.org/fr/Publications/REO/SSA/Issues/2018/09/20/sreo1018#ch3

II.2- Les défis actuels et à venir au niveau de l'emploi

Politiques macroéconomiques ciblées (connexion de l'offre à la demande), investissement capital humain (hausse de la productivité, travail qualifié), diversification des secteurs d'activités créateurs d'emplois (secteur agricole reste le principal créateur d'emplois), modifications technologiques et enjeux sur l'emploi, croissance de l'emploi suffisante pour combler l'augmentation de la population active (plus de 3% en moyenne par an)

Sujet 2 :

1) Exercice de microéconomie (7 points)

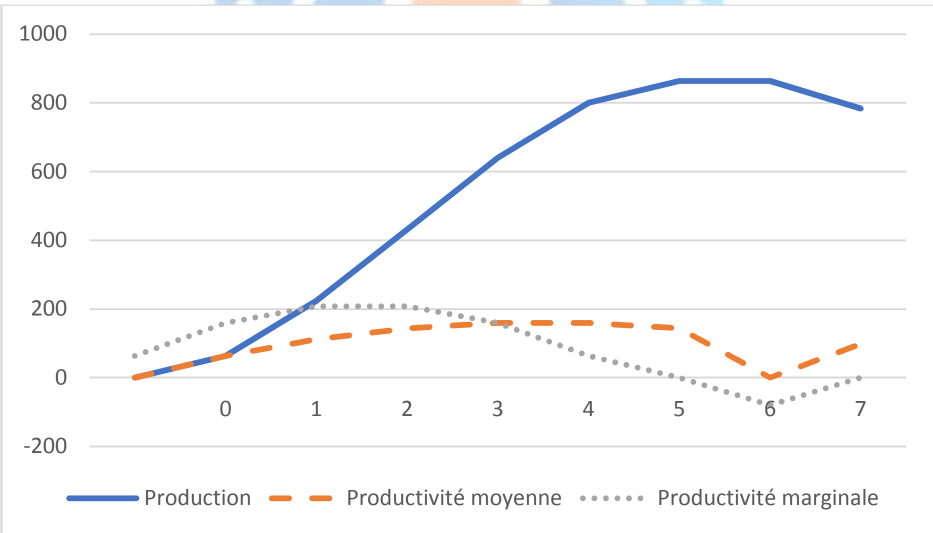
Un bien Q est produit à l'aide de deux facteurs de production, le travail (L) et le capital (K). A court terme, l'entreprise n'a pas la possibilité de changer son stock de capital. La production varie donc en fonction du nombre d'unités de facteur L (une unité de L correspond à une heure de travail ouvrier). La production réalisée est présentée dans le tableau ci-dessous :

Unités de travail L	Unités Produites Q
0	0
1	64
2	224
3	432
4	640
5	800
6	864
7	864
8	784

1- Calculez les valeurs de la productivité totale, la productivité moyenne et la productivité marginale de l'exemple proposé.

Nb d'heures de travail L	Nombre d'unités produites Q	PM Q/L	Pm ΔQ/ΔL
0	0	0	64
1	64	64	160
2	224	112	208
3	432	144	208
4	640	160	160
5	800	160	64
6	864	144	0
7	864	123.43	-80
8	784	98	-

2- Donnez la représentation graphique des diverses courbes de productivité.



3- Quelle est la productivité horaire lorsque L = 4 et lorsque L = 6 ?

160 et 144 (voir tableau)

4- Que signifie l'existence d'une productivité marginale positive ? négative ? nulle ?

La productivité marginale d'un facteur est par définition la variation de production qui résulte de l'augmentation d'une unité de ce facteur.

Positive : la productivité totale augmente du fait de l'utilisation d'une unité supplémentaire de facteur

Négative : l'utilisation d'une unité supplémentaire de facteur entraîne une baisse de la quantité totale produite.

Nulle : l'utilisation d'une unité supplémentaire de facteur laisse la production totale inchangée.

5- La valeur de la productivité marginale du facteur travail varie lorsque le nombre d'heures augmente. En vous appuyant sur l'exemple, montrer quel est le lien qui peut être établi entre la valeur et le sens de l'évolution de la productivité marginale du travail et ceux de la productivité totale ?

Valeur de L	0 1 2	3 4 5 6	7 8
Valeur de Pm	Positive	Positive	Négative
Sens de variation de Pm	Croissante	Décroissante	-
Sens de variation de la productivité totale	Croissance + que proportionnelle à l'utilisation de L	Croissance moins que proportionnelle à l'utilisation de L	Décroissance

2) Exercice de macroéconomie (7 points)

Soit une économie imaginaire dans laquelle sont appliqués les principes keynésiens :

Y = revenu national, C = consommation nationale, I = investissement national

Les comportements de l'économie étudiée sont caractérisés par les équations suivantes :

$C = cY + Co$

$I = I_0$

Co = 100 milliards de la monnaie de ce pays, c = 0.75 et Io = 10 milliards.

1) - Calculez le revenu national d'équilibre Y_e.

OG = Y et DG = C + Y

A l'équilibre OG = DG donc Ye = C+ I

Ye = 0,75 Ye + 100 + 10

Ye = 440 milliards

2) - I_0 passe de 10 milliards à 20 milliards, quantifiez l'effet sur le revenu d'équilibre.

DG = 0,75Y + 100 + 20

A l'équilibre DG = OG =Ye'

Ye' =0,75 Ye' + 120

Ye' = 480 milliards

Ye augmente de 40, soit quatre fois l'augmentation de l'investissement

3) Calculez la valeur du multiplicateur d'investissement *k*.

Deux façons de calculer k :

1. $k = dYe / dI_0 = 1/(1-c) = 1/ 0,25 = 4$

2. k = (480 – 440) / (20 – 10) = 4

4) - On raisonne à nouveau à partir de l'équilibre initial et on suppose désormais que l'Etat intervient dans l'économie. Les relations macroéconomiques de ce secteur institutionnel sont décrites par :

G = 5 et T = 0.2Y + 4

Déterminez le revenu d'équilibre macroéconomique dans cette économie.

OG = Y et DG = C + I + G

A l'équilibre OG = DG donc Y = C + I + G

Ye = (0.75Yd + 100) + 10 +5

Ye = 0.75Yd +115

$Ye = 0.75(Ye - T) + 115$

$Ye = 0.75 (Ye - 0.2Ye – 4) + 115$

$Ye = 0.6Ye + 112$

Ye = 280 milliards

5) On suppose une augmentation de 20% des dépenses publiques. Déterminez la valeur du nouvel équilibre induite par l'augmentation des dépenses publiques et en déduire la valeur du multiplicateur de dépenses publiques.

$G' = 6$ et $\Delta G = 1$

$Ye' = 0.6Ye' + 112 + 1$

$Ye' = 0.6Ye' + 113$

$Ye' = 113/0.4 = 282.5$

$k = 1 / [1-c(1-t)] = 1/ 0.4 = 2.5$ ou $k = \Delta Y/\Delta G = 2.5/1 = 2.5$

3) Questions (6 points)

a- Quelle est la différence entre un oligopole et une situation de concurrence monopolistique ?

Une situation d'oligopole se rencontre lorsque sur un marché il y a un nombre très faible d'offreurs (vendeurs) et un nombre important de demandeurs (clients). On parle aussi de situation de marché oligopolistique. Il s'agit d'une situation de marché imparfait : dans le cadre de la concurrence pure et parfaite, les offreurs sont indépendants, alors que dans le cas d'un oligopole le profit de chaque producteur dépend de l'attitude des autres offreurs.

La concurrence monopolistique désigne une structure de marché où celui-ci est séparé en niches, chacune servie par un monopole local. Un tel cadre permet l'existence d'une forme de concurrence entre les monopoles ; les frontières entre les différentes niches étant endogènes, déterminées par l'action de chacun des monopoles. La concurrence monopolistique se rencontre sur des marchés de biens possédant une identité forte (image de marque, par exemple) qui fait d'un bien donné un substitut imparfait des autres. Cela s'applique ainsi aux vêtements de marque comme aux consoles de jeux vidéo.

b- Comment est calculée l'inflation ?

Pour mesurer l'inflation, on observe un « panier » représentatif de l'ensemble des biens consommés à partir duquel on construit un indice des prix à la consommation (IPC) qui permet d'apprécier la variation des prix. Le taux d'inflation est la variation en pourcentage de cet indice sur une période donnée : si le prix moyen du « panier » est passé de 100 à 102, l'inflation est de (102-100)/100 = 2/100 = 2%.

c- Quels sont les enjeux macroéconomiques de l'investissement ?

L'investissement, qui représente l'acquisition de machines et de moyens de production, est une nécessité pour les entreprises. Les équipements, qui s'usent, doivent être remplacés, mais l'entreprise doit aussi réaliser de nouveaux investissements pour se développer, ou plus simplement, maintenir son activité face à la concurrence.

L'investissement joue un rôle important dans l'économie car il se situe autant du côté de la demande que du côté de l'offre. En effet, l'investissement constitue une composante de la demande puisque l'entreprise qui investit fait travailler d'autres entreprises fabriquant les machines par exemple. La demande d'investissement stimule ainsi l'activité économique. Par ailleurs, l'investissement favorise l'offre de biens et de services puisqu'il permet de produire plus et mieux.

Ainsi, l'investissement a un effet multiplicateur sur la production nationale et génère de nouveaux emplois.

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

Pour conclure, il était proposé de compléter le tableau 2 de l'énoncé. On trouvera ci-dessous celui-ci complété (les chiffres que les candidats devaient trouver sont inscrits en italique)

	(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**
	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)$	$(n_i - np_i)^2$	**(5)/(3)**
1	333	0,56250	337,5	-4,5	20,25	0,06
2	75	0,13125	78,75	-3,75	14,0625	0,18
3	42	0,05625	*33,75*	*8,25*	*68,0625*	*2,02*
4	117	0,18750	112,5	4,5	20,25	0,18
5	30	0,04375	*26,25*	*3,75*	*14,0625*	*0,54*
6	3	0,01875	11,25	-8,25	68,0625	6,05
Total	600	1,00000	600			*9,03*

Conclusion : la valeur calculée de 9,03 étant supérieure à la valeur donnée 5,99, il y a dépendance entre le niveau de satisfaction et le fait de renvoyer la fiche d'appréciation. On constate que le calcul opéré à la case n°6 (croisement des critères « clients n'ayant pas retourné la fiche » et « clients peu ou pas satisfaits ») contribue pour beaucoup à cette conclusion : c'est en effet là que l'écart est le plus fort

Question 2

La moyenne vaut 1,964 jours et la variance est égale à 1,955 jours^2

Question 3

Les candidats ont une grande marge de manœuvre pour le calcul. Le résultat devait être voisin de 1.520 interventions.

Question 4

T2 2018 – T2 2015 = (T2 2018 – T2 2017) + (T2 2017 – T2 2016) + (T2 2016 – T2 2015)
= (1440 - 1430) + (1380 – 1390) + (1350 - 1320)
= 10 – 10 + 30 = 30 interventions supplémentaires

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet se compose de 5 exercices indépendants que les candidats peuvent traiter dans l'ordre de leur choix.
La clarté et la précision de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x positif ou nul, on pose
$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.
Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = x^2 + x - 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. En calculant $f_n(x) + 2$ pour $x \neq 1$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{1}{2}(1 + u_n^{n+1})$.
   Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$, on pose $I_n(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^n} dx$ pour $A > 1$.

1. On note f_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^{n-1}}$ et on note f'_n sa dérivée. Calculer $f'_n(x)$.
2. Calculer $I_n(A)$ et montrer qu'elle admet une limite quand A tend vers $+\infty$.
   Montrer que cette limite, notée $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$, a pour valeur $\frac{1}{(n-1)^2}$.
3. Soit X la variable aléatoire dont la densité est la fonction ϕ est définie par :
   $\phi(x) = 0$ si $x < 1$ et $\phi(x) = k\frac{\ln(x)}{x^4}$ si $x \geqslant 1$, où k est un réel.
   (a) Calculer k.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice relative à la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est N. Cette matrice est constituée de « 1 » sur la première et la dernière colonne et sur la diagonale principale et de « 0 » partout ailleurs (d'où son nom).

Ainsi, on a : $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'image de f puis son noyau.
2. Déterminer le rang de $N - I_n$ où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.
3. Déduire de ce qui précède deux valeurs propres de f ainsi que des bases de leurs sous espaces propres associés.
4. Calculer l'image par f du vecteur $u = (1, 2, 2, ..., 2, 1)$.
5. En déduire que N est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}NP$.
6. Écrire les matrices D, N, P dans le cas où $n = 4$.
   Calculer P^{-1} puis N^k où k est un entier naturel non nul.

Exercice 4

Dans une population donnée, on note p la proportion d'individus atteints par un certain virus. Sa présence éventuelle n'est rendue visible par aucun symptôme ; pour savoir si un individu est atteint, il faut donc lui faire subir un test.
Ce test possède les caractéristiques suivantes : si l'individu est atteint, le test est positif dans 99% des cas et s'il est sain, le test est négatif dans 99% des cas.

1. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit atteint par ce virus sachant que son test est positif.
2. Évaluer cette probabilité pour $p = \frac{2}{1000}$
3. Que pensez-vous du résultat ?

Exercice 5

Soient m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
On a disposé m boules numérotées de 1 à m dans une boîte et on invite n enfants à venir chacun à leur tour tirer une boule de la boîte et à la remettre en jeu après avoir noté son numéro. Le tirage de la boule est aléatoire.
Un enfant qui tire une boule numérotée i gagne i points.
Pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'enfants qui choisissent la boule numérotée i, et soit T le total des points obtenus.

1. Donner la loi de X_i ; préciser son espérance et sa variance.
2. On pose $Y = X_1 + X_2$. Que représente Y ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.
3. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Exprimer T en fonction des X_i. Calculer l'espérance de T.
5. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on désigne par N_k le numéro de la boule choisie par le k^{ieme} enfant. Déterminer la loi de N_k, son espérance et sa variance.
6. Exprimer T en fonction des N_k. Calculer l'espérance et la variance de T.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Le travail divise-t-il les humains ?

Sujet n° 2

« Quand les femmes sont éduquées, leurs pays deviennent plus forts et plus prospères » indiquait Michelle OBAMA lors d'un voyage en Afrique en 2013. Développez cette citation.

Sujet n° 3

De nombreux États africains souhaitent développer le secteur du tourisme. Quels sont les avantages et les difficultés qu'implique cette démarche ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

ÉCONOMIE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des deux sujets suivants.

Sujet n°1 : Dissertation

Quels sont les enjeux, pour les économies d'Afrique sub-saharienne, du réchauffement climatique ?

Sujet n°2 : Exercices et questions

Macroéconomie (7 points) :

Les comportements macroéconomiques au sein des deux grands secteurs institutionnels d'une économie peuvent être formalisés de la manière suivante :
Les entreprises investissent pour un montant $I_o = 2\ 300$
Les ménages consomment selon l'équation : $C = 0.7Y + 2\ 500$

1- Calculez le revenu d'équilibre de cette économie. Sachant que le revenu de plein-emploi est égal à 19 200, dans quelle situation se trouve aujourd'hui l'économie considérée ?

2- Calculez quelle devrait être la valeur de la propension marginale à consommer des ménages pour que le revenu d'équilibre soit égal au revenu de plein emploi.

Soient X= 3 340, les exportations du pays et M = 0.18Y+100, ses importations.

3- Que représente le paramètre 0.18 ? Quelle analyse économique peut-on en déduire ?

4- Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.

5- Calculez le solde commercial de cette économie. Quel devrait être le revenu national pour que le solde commercial soit équilibré ?

On suppose désormais que l'État intervient dans l'économie. Les comportements de ce secteur institutionnel sont formalisés par :
Impôts et taxes : T = 0.2Y + 1 000
Dépense publique : G = 1 500

6- Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.

7- On suppose une augmentation de 10% des dépenses publiques. En déduire la valeur du multiplicateur des dépenses publiques financées par l'emprunt.

Les exportations du pays considéré dépendent à présent de la demande du reste du monde (Y*) avec :
X = 0.9 Y* + 1 000 et Y* = 2 600
Suite à une crise financière, les pays du reste du monde voient leur revenu baisser de 15%.

8- On raisonne désormais à partir de l'équilibre initial de la question 6. Quelles sont les conséquences, pour l'économie nationale, de cette diminution de la demande externe ?

Microéconomie (7 points) :

Exercice 1 :

Soit l'entreprise Kanté dont la contrainte technologique est définie par la fonction :

$$Q(K,L) = 2.(K^{1/2} + L^{1/2})$$

Avec Q : la quantité produite
K et L : les quantités utilisées de capital et de travail, respectivement.
On note w et r les prix en dollars d'une unité de travail et d'une unité de capital respectivement.

1- Analysez cette fonction de production : rendements d'échelle, productivités marginales, élasticité de la production par rapport aux quantités de facteurs.

2- Déterminez l'expression du taux marginal de substitution technique du capital au travail.

3- Le producteur dispose d'un budget de 100 dollars pour la production. Déterminez l'équation du sentier d'expansion ainsi que les demandes optimales du producteur en facteurs de production.

4- Calculez les demandes de facteur et la production associées à l'optimum lorsque le budget dont il dispose est de 58\$, r=1\$ et w=2\$.

5- Faites la représentation associée à l'optimum précédent en y plaçant l'isoquante, le sentier d'expansion et la contrainte budgétaire. Vous aurez au préalable défini les équations de chacune de ces courbes.

<u>Exercice2 :</u>

Supposons qu'il existe deux biens dans une économie : les mangues et les ignames. Supposons aussi que notre consommateur a une fonction d'utilité des deux biens de la forme décrite ci-dessous, où X désigne la quantité d'ignames et Y la quantité de mangues.

$U = XY$

1- Dessiner une courbe d'indifférence définie par cette fonction d'utilité qui représente un niveau d'utilité de 2,5.

2- Quel est le taux marginal de substitution entre les ignames et les mangues quand notre consommateur consomme 50 ignames et 50 mangues ? Quel est le taux marginal de substitution entre les deux biens, lorsqu'il consomme 100 ignames et 50 mangues ?

3- Si une unité d'ignames et une unité de mangues coûtent chacune 1 dollar et que notre consommateur dépense 100 dollars, quel panier de mangues et d'ignames achètera-t-il ?

4- Si le prix unitaire des ignames et des mangues est respectivement de 4 et 3 dollars, déterminer graphiquement et par le calcul quel panier de mangues et d'ignames le consommateur achèterait avec son revenu de 100 dollars.

Questions (6 points) :

1- Le PIB est-il un bon indicateur pour mesurer le développement économique ?

2- Qu'est-ce qu'un pays économiquement ouvert ?

3- Quels sont les principaux déterminants de l'épargne ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA
STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE
STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE
(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Question n°1

Pour l'année 2019, la répartition des salariés par catégorie et les salaires moyens par catégorie dans l'entreprise A sont donnés dans le tableau suivant :

Catégorie	Ouvriers	Employés	Cadres	Cadres supérieurs
Nombre de salariés	55	18	9	4
Salaire moyen	13 800,00	17 400,00	24 600,00	48 500,00

Déterminer la masse salariale pour chacune des catégories de salariés.

Déterminer le salaire moyen dans l'entreprise A.

Question n°2

Pour l'année 2019, la répartition des salariés par catégorie et les masses salariales par catégorie de l'entreprise B sont données dans le tableau suivant :

Catégorie	Ouvriers	Employés	Cadres	Cadres supérieurs
Nombre de salariés	37	23	14	6
Masse salariale	492 100,00	379 500,00	331 800,00	270 000,00

L'entreprise B affirme : « Le salaire moyen dans notre entreprise est supérieur au salaire moyen dans l'entreprise A ». Justifier cette affirmation.

Question n°3

L'entreprise A affirme : « Pour chaque catégorie de salariés, le salaire moyen d'un agent dans notre entreprise est supérieur au salaire moyen d'un agent dans l'entreprise B ». Justifier cette affirmation.

Question n°4

Dans quelle entreprise souhaiteriez-vous travailler ? Justifier

Question n°5

Pour 2020, une augmentation salariale intervient : l'entreprise B souhaite réduire l'écart entre les salaires moyens par catégorie de salariés avec ceux de l'entreprise A. Pour ce faire, elle augmente la masse salariale de chaque catégorie de 4 %.

A l'issue de cette augmentation, donner, par catégorie, l'écart entre les salaires moyens de l'entreprise A et ceux de l'entreprise B. Commenter

Question n°6

Pour 2020, l'augmentation de 4 % de la masse salariale par catégorie ayant été validée, le tableau suivant donne, par catégorie, le nombre de salariés de l'entreprise B ayant bénéficié ou non d'une augmentation :

Catégorie	Ayant été augmenté	N'ayant pas été augmenté	Total
Ouvriers	19	18	37
Employés	19	4	23
Cadres	9	5	14
Cadres supérieurs	5	1	6
Total	52	28	80

Les ouvriers et employés affirment que les cadres ont été plus augmentés, notamment les cadres supérieurs. Justifier.

Question n°7

Face à cette critique, la direction de l'entreprise B décide de suivre dans l'avenir l'évolution salariale annuelle des cadres supérieurs. L'évolution en pourcentage des salaires des 6 cadres supérieurs est donnée dans le tableau suivant :

Cadre 1 (X_1)	Cadre 2 (X_2)	Cadre 3 (X_3)	Cadre 4 (X_4)	Cadre 5 (X_5)	Cadre 6 (X_6)
4 %	6 %	0 %	8 %	2 %	4 %

a) Calculer la moyenne et l'écart-type.

b) Pour suivre l'évolution salariale dans les années à venir, l'entreprise décide de choisir au hasard 2 cadres supérieurs, formant ainsi un échantillon. Chaque cadre supérieur a la même probabilité d'être sélectionné. Combien d'échantillons peut-on former ? Expliciter les.

c) Pour chaque échantillon, calculer la moyenne.

d) Calculer la moyenne des chiffres obtenus à la question précédente. Justifier le résultat.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

CORRIGÉ de MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. La dérivée de la fonction f_n est définie par $f'_n(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Pour tout $x>0$, $f'_n(x)>0$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus $f_n(0)=-1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$ et comme $0\in[-1,+\infty[$ il existe une unique réel u_n strictement positif tel que $f_n(u_n)=0$.

2. $u_1=1$ et u_2 est la solution positive de l'équation $x^2+x-1=0$; $u_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^{n+1}$, ainsi $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+u_n^{n+1}$ et donc $f_{n+1}(u_n)=u_n^{n+1}$. On en déduit que $f_{n+1}(u_n)>0$ et donc que $f_{n+1}(u_n)>f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est croissante, $u_n>u_{n+1}$; la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0 elle est convergente.

4. $f_n(x)+2=\sum_{K=0}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Ainsi $f_n(u_n)+2=\frac{u_n^{n+1}-1}{u_n-1}$ d'où $2u_n-2=u_n^{n+1}-1$ et finalement $u_n=\frac{1}{2}(1+u_n^{n+1})$. On sait que pour tout n, $u_n<u_2$ donc $u_n<0,7$. Par conséquent $0<u_n^{n+1}<0,7^{n+1}$. $\lim_{n\to+\infty} 0,7^{n+1}=0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1}=0$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. $f'(x)=\frac{1}{x^n}-(n-1)\frac{\ln(x)}{x^n}$.

2. Grâce au résultat précédent on a $\frac{\ln(x)}{x^n}=\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^n}-\frac{1}{n-1}f'(x)$. On en déduit

   que $I_n(A)=\frac{-1}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{A^{n-1}}-1\right)-\frac{1}{n-1}(f(A)-f(1))$. Or $\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^{n-1}}=0$ car $n\geqslant 2$ et

   $\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln(A)}{A^{n-1}}=0$, donc $\lim_{A\to+\infty}I_n(A)=\frac{1}{(n-1)^2}$.

3. a) On doit avoir $\int_1^{+\infty}\frac{k\ln(x)}{x^4}=1\,\mathrm{d}x$ c'est à dire $\frac{k}{(4-1)^2}=1$ donc $k=9$.

b) $E(X)=\int_1^{+\infty}x\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}9\ln\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$. $E(X^2)=\int_1^{+\infty}x^2\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}9\ln\frac{(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=9$.

$V(X)=9-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{63}{16}$.

Exercice 3

1. L'image de *f* est engendrée par les vecteurs colonnes de sa matrice, donc ici par les $(n-1)$ premières colonnes qui sont clairement indépendantes. L'image de

f est l'espace engendré par $\sum_{i=1}^{n}e_i$, e_2 , ..., e_{n-1} . Sa dimension est $n-1$, on en

déduit que le noyau est de dimension 1 ; il est engendré par e_1-e_n car

$f(e_1-e_n)=f(e_1)-f(e_n)=0$.

2. Les $(n-2)$ colonnes centrales de $N-I_n$ sont nulles et les deux colonnes

restantes sont clairement indépendantes, donc cette matrice est de rang 2.

3. Le noyau étant de dimension 1 ; 0 est une valeur propre dont le sous espace propre associé est engendré par e_1-e_n . De la question 2. il résulte que 1 est

valeur propre et son sous espace propre associé est engendré par e_2 , ..., e_{n-1} .

4. Le calcul donne $f(u)=(2,4,4,\ldots.4,2)=2u$. On en déduit que 2 est valeur propre,

Son sous espace propre associé est nécessairement de dimension 1 ; il est engendré par *u*.

5. Bilan de ce qui précède : f possède une base de vecteurs propres. Elle est constituée de $(1,0,\ldots,0,-1)$ associé à 0, e_2, ..., e_{n-1} associés à 1 et u associé à 2. Donc N est diagonalisable. La matrice diagonale D semblable à N est ainsi constituée : sa diagonale principale est 0, 1, 1 .... , 1, 2. La matrice P a pour colonnes les vecteurs propres $\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}$ ..... , $\begin{pmatrix}0\\\ldots\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\\ldots\\2\\1\end{pmatrix}$.

6. Dans le cas où $n=4$, $N=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ et

$P=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&2\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$. Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&\frac{-1}{2}\\-1&1&0&-1\\-1&0&1&-1\\\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$N^k=PD^kP^{-1}$ et $D^k=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2^k\end{pmatrix}$. Le calcul aboutit à

$$N^k=\begin{pmatrix}2^{k-1}&0&0&2^{k-1}\\2^k-1&1&0&2^k-1\\2^k-1&0&1&2^k-1\\2^{k-1}&0&0&2^{k-1}\end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. Notons N l'événement « l'individu choisi est atteint par le virus » , T l'événement « le test est positif » et $\overline{N}$ et $\overline{T}$ les événements contraires. On cherche $P_T(V)$.

$$P_T(V)=\frac{P(V\cap T)}{P(T)}=\frac{P(V\cap T)}{P(V\cap T)+P(\bar{V}\cap T)}$$ ce qui donne

$$P_T(V)=\frac{0{,}99\,p}{0{,}99\,p+0{,}01(1-p)}=\frac{99\,p}{1+98\,p}.$$

2. Dans le cas où $p=\frac{2}{1000}$, on a $P_T(V)=\frac{0{,}198}{1}+0{,}196=\frac{198}{1196}$. On peut dire que

$P_T(V)\simeq\frac{1}{6}$.

3. Ce résultat montre que le test n'est pas fiable ; pour l'améliorer il faudrait que la probabilité initiale de 99 % soit très supérieure.

Exercice 5

1. X_1 suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{m}$. Son espérance est $\frac{n}{m}$ et

   sa variance $n\times\frac{1}{m}\times\left(1-\frac{1}{m}\right)=\frac{n(m-1)}{m^2}$.

2. Y suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{m}$. Son espérance est $\frac{2n}{m}$ et sa

   variance $n\times\frac{2}{m}\times\left(1-\frac{2}{m}\right)=\frac{2n(m-2)}{m^2}$.

3. Si les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, alors

   $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$. Or $V(X_1+X_2)=\frac{2n(m-2)}{m^2}$ et

   $V(X_1)+V(X_2)=\frac{2n(m-1)}{m^2}$. Les variables X_1 et X_2 ne sont donc pas

   indépendantes.

4. $T=\sum_{i=1}^{m} iX_i$. $E(T)=\sum_{i=1}^{m} iE(X_i)$, donc $E(T)=\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m} i=\frac{n}{m}\frac{m(m+1)}{2}=\frac{n(m+1)}{2}$.

5. N_k suit la loi uniforme : pour tout $i\in[\![1;m]\!]$, $P(N_k=i)=\frac{1}{m}$. $E(N_k)=\frac{m+1}{2}$ et

   $V(N_k)=\frac{m^2-1}{12}$.

6. $T=\sum_{k=1}^{n} N_k$. $E(T)=\sum_{k=1}^{n} E(N_k)=\frac{n(m+1)}{2}$. Comme les N_k sont indépendantes, la

   variance de T s'obtient en écrivant $V(T)=\sum_{k=1}^{n} V(N_k)$, soit $V(T)=\frac{n(m^2-1)}{12}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

CORRIGÉ d'ÉCONOMIE

Macroéconomie (7 points) :

Les comportements macroéconomiques au sein des deux grands secteurs institutionnels d'une économie peuvent être formalisés de la manière suivante :
Les entreprises investissent pour un montant Io = 2300
Les ménages consomment selon l'équation : C = 0.7Y +2500

1- Calculez le revenu d'équilibre de cette économie. Sachant que le revenu de plein-emploi est égal à 19200, dans quelle situation se trouve aujourd'hui l'économie considérée ?

A l'équilibre Offre Globale (OG) = Demande Globale (DG)

Donc $Ye = C + I$
$Ye = cYe+Co+Io$
$Ye = (Co+Io) / (1-c)$

A.N. $Ye = 4800 / 0.3 =$ <u>16000 u.m.</u>
Ce revenu d'équilibre est inférieur au revenu de plein emploi (16000 < 19200). L'économie est donc en situation de sous-emploi c'est-à-dire qu'une part de la population active n'est pas employée et se retrouve en situation de chômage.

2- Calculez quelle devrait être la valeur de la propension marginale à consommer des ménages pour que le revenu d'équilibre soit égal au revenu de plein emploi.

On a trouvé précédemment que $Ye = (Co+Io) / (1-c)$
On cherche c pour lequel Ye = 19200, Co et Io restant inchangés.
On a donc $c = 1 - (Co+Io)/Ye$
A.N. $c = 1- 4800/19200 =$ <u>0.75</u>
La propension marginale nécessaire pour être dans une situation de plein emploi est donc 0.75.

Soient X= 3340, les exportations du pays et M = 0.18Y+100, ses importations.

3- **Que représente le paramètre 0.18 ?**

Ce paramètre représente la propension marginale à importer c'est-à-dire la variation du niveau d'importation consécutive à la variation d'une unité du revenu. La propension marginale à importer est donc un indicateur du degré de dépendance de la structure productive d'une économie vis-à-vis de ses produits importés.

4- **Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.**

En économie ouverte l'équilibre est formalisé en tenant compte des importations et des exportations :
OG = Y + M
DG = C + I + X
A l'équilibre OG= DG
Donc Ye + mYe + Mo = cYe + Co + Io + Xo

$$Ye = \frac{1}{1+m-c}(Co + Io + Xo - Mo)$$

A.N. Ye = 8040/0.48 = 16 750 u.m.

5- **Calculez le solde commercial de cette économie. Quel devrait être le revenu national pour que le solde commercial soit équilibré ?**

Solde commercial = X – M = Xo – mYe – Mo
A.N. SC = 3340 - 0.18*16750 - 100 = 225 u.m.
Ce solde étant positif on a un excédent de la balance commerciale.

Pour une balance équilibrée, on a un solde égal à zéro : SC = O
Donc Xo - mY- Mo = 0
Y = (Xo-Mo)/m
A..N. Y = 3240/0.18 = 18 000 u.m.

On suppose désormais que l'Etat intervient dans l'économie. Les comportements de ce secteur institutionnel sont formalisés par :
T = 0.2Y + 1000
G = 1500

6- **Déterminez puis calculez le nouveau revenu d'équilibre de l'économie.**

En économie ouverte avec intervention de l'État, l'équilibre peut être formalisé de la façon suivante :

OG = Y + M
DG = C + I + G + X
DG = cYd + Co + Io + Go + Xo

DG = c(Y-T) + Co + Io + Go + Xo
DG = c(Y-tY-To) + Co + Io + Go + Xo
DG = c(1-t)Y –cTo + Co + Io + Go + Xo

À l'équilibre OG = DG
Ye + mYe + Mo = c(1-t)Ye –cTo + Co + Io + Go + Xo

$$Ye = \frac{1}{1+m-c(1-t)}(-cTo + Co + Io + Go + Xo - Mo)$$

A.N. Ye = 8840 / 0.62 = <u>14258,06 u.m.</u>

7- On suppose une augmentation de 10% des dépenses publiques. En déduire la valeur du multiplicateur des dépenses publiques financées par l'emprunt.

Go est désormais égal à 1650 u.m. (1500 + 150)

Le nouveau revenu d'équilibre suite à l'augmentation des dépenses publiques est désormais :

Ye' = (8840+150) / 0.62 = <u>14500 u.m.</u>

Le multiplicateur des dépenses publiques g = ΔY/ΔGo = (14500-14258,06) / (1650-1500)
<u>g =1,61</u>

Les exportations du pays considéré dépendent à présent de la demande du reste du monde (Y*) avec :

X = 0.9 Y* + 1000 et Y* = 2600

Suite à une crise financière, les pays du reste du monde voient leur revenu baisser de 15%.

8- On raisonne désormais à partir de l'équilibre initial de la question 6. Quelles sont les conséquences pour l'économie nationale de cette diminution de la demande externe ?

Suite à la crise Y* est désormais égal à 2210 (2600 - 0.15*2600)

Les conséquences de cette diminution (- 390 u.m.) de la demande extérieure sont les suivantes :

- Au niveau des exportations : X' = 0.9*2210 + 1000 = 2989 u.m. donc ΔX = 2989 -3340 = <u>-351 u.m.</u>

- Au niveau du revenu national : Ye' = (8840-351) / 0.62 = 8489 / 0.62 = 13691,935 u.m. donc ΔYe = 13691,935 - 14258,06 = <u>-566,129 u.m.</u>

- Au niveau de la consommation : $\Delta C = 0{,}7.\Delta Y = 0.7*(-566{,}129) =$ - 396,29 u.m.

- Au niveau des importations : $\Delta M = 0{,}18.\Delta Y =$ - 101,03 u.m.

- Au niveau des impôts : $\Delta T = 0.2\ \Delta Y =$ - 113,258 u.m.

Microéconomie (7 points) :

Exercice 1 :

Soit l'entreprise Kanté dont la contrainte technologique est définie par la fonction :

$$Q(K,L) = 2.(K^{1/2} + L^{1/2})$$

Avec Q : la quantité produite
K et L : les quantités utilisées de capital et de travail, respectivement.
On note w et r les prix en dollars d'une unité de travail et d'une unité de capital respectivement.

1/ Analysez cette fonction de production : rendements d'échelle, productivités marginales, élasticité de la production par rapport aux quantités de facteurs.

- Rendements d'échelle

Pour cela, calculons :

$f(\lambda.K,\lambda.L)=2.(\lambda.K)^{1/2}+2.(\lambda.L)^{1/2}=2.\lambda^{1/2}.K^{1/2}+2.\lambda^{1/2}.L^{1/2}=\lambda^{1/2}.f(K,L)$ pour tout scalaire λ.

Donc les rendements d'échelle sont décroissants i.e. que si tous les facteurs sont multipliés par 2 la production fait moins que doubler (elle augmente seulement de racine de 2).

- Productivités marginales

Comme $X=f(K,L)=2.K^{1/2}+2.L^{1/2}$*, on a :*

- pour le travail $\frac{\partial X}{\partial L}=L^{-1/2}>0$ *et* $\frac{\partial^2 X}{\partial L^2}=-\frac{L^{-3/2}}{2}<0$: PmL décroissante.

- pour le capital $\frac{\partial X}{\partial K}=K^{-1/2}>0$ *et* $\frac{\partial^2 X}{\partial K^2}=-\frac{K^{-3/2}}{2}<0$: PmK décroissante

- Élasticités de la production par rapport aux quantités de facteurs

Les élasticités de la production par rapport aux quantités de facteurs mesurent la sensibilité de la production face à la variation de ce facteur, soit ici :

$$\varepsilon_{X/K} = \frac{\partial X / \partial K}{X / K} = \frac{\sqrt{K}}{2.\left(\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)}$$

$$\varepsilon_{X/L} = \frac{\partial X / \partial L}{X / L} = \frac{\sqrt{L}}{2.\left(\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)}$$

2/ Déterminez l'expression du taux marginal de substitution technique du capital au travail.

$TMST_{L \to K}$: nombre d'unités de capital qu'il faut intégrer au processus de production pour compenser la baisse de l'utilisation du travail sans faire varier le niveau de production.

$dX = \frac{\partial f}{\partial L}.dL + \frac{\partial f}{\partial K}.dK = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = -\frac{dK}{dL}$ = $TMST_{L \to K}$ i.e. que le TMST peut être défini à l'aide des productivités marginales des facteurs, qui ne sont que les dérivées partielles de *X*. Donc $TMST_{L \to K} = \frac{\frac{\partial X}{\partial L}}{\frac{\partial X}{\partial K}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$.

3/ Le producteur dispose d'un budget de 100 $ pour la production. Déterminez l'équation du sentier d'expansion ainsi que les demandes optimales du producteur en facteurs de production.

Programme de maximisation du producteur (maximisation de production sous contrainte de budget) :

$$\begin{aligned} &Max \quad X = 2.K^{1/2} + 2.L^{1/2} \\ &s.c. \quad C = w.L + r.K \end{aligned}$$

Lagrangien : $L = 2.K^{1/2} + 2.L^{1/2} - \lambda\left[w.L + r.K - C\right]$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial K}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial L}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial K}(L,K)-\lambda.r=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial L}(L,K)-\lambda.w=0\\ w.L+r.K=C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}TMST_{L,K}=-\dfrac{dL}{dK}=\dfrac{\frac{\partial f}{\partial K}}{\frac{\partial f}{\partial L}}=\dfrac{r}{w}\\ w.L+r.K=C\end{cases}$$

Nous retrouvons ici un résultat fondamental : le producteur est à l'optimum lorsque le rapport des productivités marginales des facteurs est égal au rapport des prix des facteurs

$\frac{r}{w}=\frac{2.K^{-1/2}}{2.L^{-1/2}}=\left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}$ soit $\boxed{K=L.\left(\frac{w}{r}\right)^2}$: il s'agit de l'équation du sentier d'expansion : lieu où le producteur maximise sa production sous sa contrainte de budget.

Dans CT = w.L + r.K: $\Leftrightarrow\begin{cases}K=L\left(\frac{w}{r}\right)^2\\ w.L+r.K=C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}K=\frac{C}{(r+w)}.\frac{w}{r}\\ L=\frac{C}{(r+w)}.\frac{r}{w}\end{cases}$

Pour un budget donné *C*, chaque coordonnée optimale est une fonction décroissante du prix du facteur dont elle dépend ; il s'agit donc des fonctions de demande en facteurs *L* et *K* du producteur.

4/ Calculez les demandes de facteur et la production associées à l'optimum lorsque C=58$, r=1$ et w=2 $.

K = (58/3)*2 = 116/3

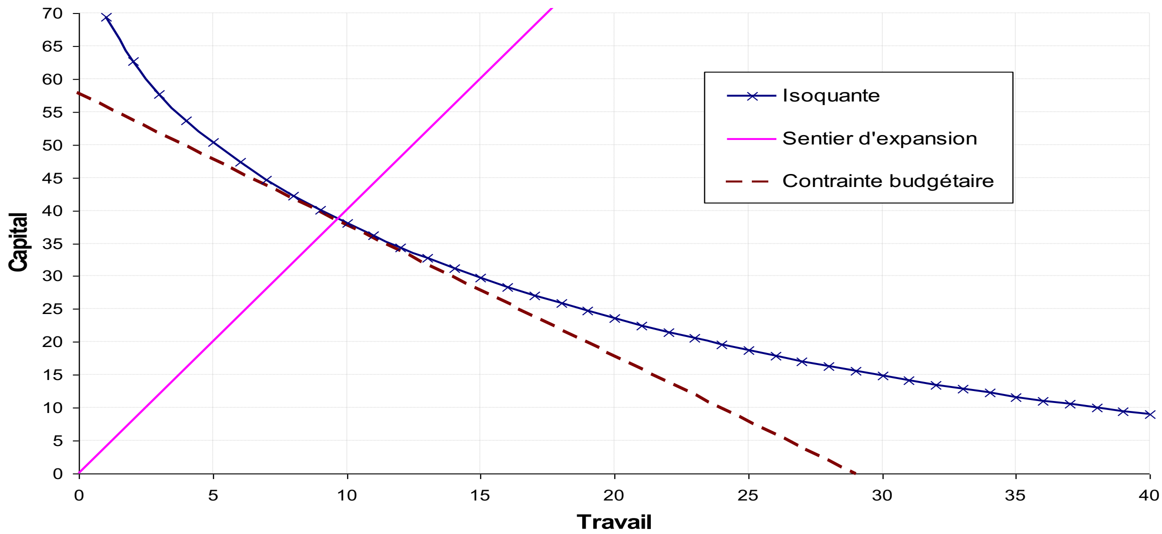
L = (58/3*(1/2) = 58/6 = 29/3

X = $2[(116/3)^{1/2}+(29/3)^{1/2}] = 18{,}65$

5/ Faites la représentation associée à l'optimum précédent en y plaçant l'isoquante, le sentier d'expansion et la contrainte budgétaire. Vous aurez au préalable défini les équations de chacune de ces courbes.

Isoquante :	Sentier d'expansion :	Contrainte budgétaire :
$18{,}65 = 2(K^{1/2}+L^{1/2}) = 2K^{1/2}+2L^{1/2}$	$K=L.\left(\frac{w}{r}\right)^2$	C = wL + rK
$2K^{1/2}= 18{,}65-2L^{1/2}$	K = 4L	58 = 2L + K
$K=(9{,}33-L^{1/2})^2$		K = 58 – 2L

Représentation graphique:



Exercice2:

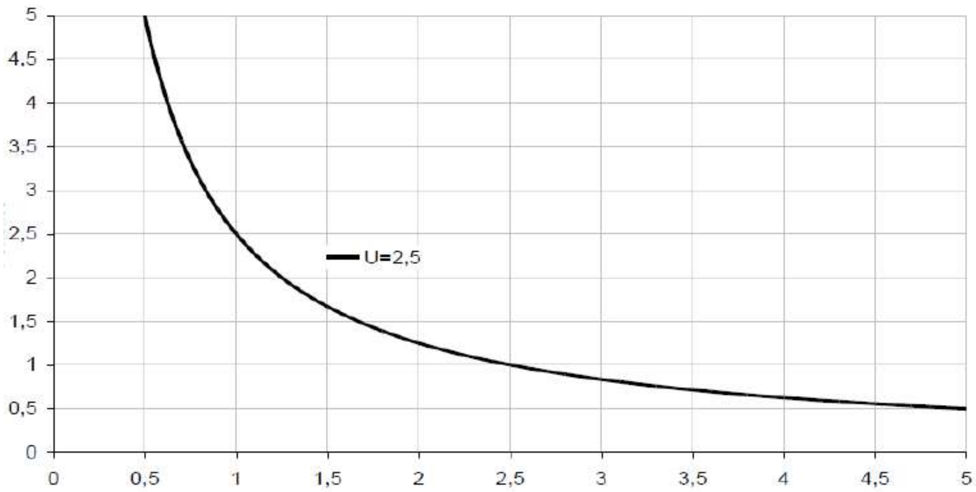
Supposons qu'il existe deux biens dans une économie : les mangues et les ignames. Supposons aussi que notre consommateur a une fonction d'utilité des deux biens de la forme décrite ci-dessous, où *x* désigne la quantité de ignames et *y* la quantité de mangues.

$$U = x.y$$

1-Dessinez une courbe d'indifférence définie par cette fonction d'utilité qui représente un niveau d'utilité de 2,5.

U=xy donc y=U/x

Pour un niveau d'utilité U=2,5 : y=2.5/x



2- Quel est le taux marginal de substitution entre les ignames et les mangues quand notre consommateur consomme 50 ignames et 50 mangues ? Quel est le taux marginal de substitution entre les deux biens, lorsque Georges consomme 100 ignames et 50 mangues ?

$TMS = U'_x / U'_y = y/x = p_x / p_y$

- si $x=y=50$
  $TMS = y/x = 1$
- si $x=100$ et $y=50$
  $TMS = 50/100 = ½$

3- Si une unité d' ignames et une unité de mangues coûte chacune 1 dollar et que notre consommateur dépense 100 dollars, quel panier de mangues et d'ignames achètera-t-il ?

$p_x = p_y = 1$; $R = 100$

$R = p_x.X + p_y.Y$ donc $100 = x + y$

et $TMS = y/x = p_x / p_y = 1$ donc $y = x$

$$\begin{cases} 100 = x + y \\ y = x \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} y = 50 \\ x = 50 \end{cases}$$

4- Si le prix unitaire des ignames et des mangues est respectivement de 4 et 3 dollars, déterminez graphiquement et par le calcul quel panier d'ignames et de mangues notre consommateur achèterait avec son revenu de 100 dollars.

$p_x = 4$; $p_y = 3$

$R = 100 = 4x + 3y$

$$\begin{cases} y/x = 4/3 \\ 100 = 4x + 3y \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} y = 50/3 \\ x = 12,5 \end{cases}$$

Questions (6 points)

1- Le PIB est-il un bon indicateur pour mesurer le développement économique ?

Le produit intérieur brut (PIB) est le principal agrégat mesurant l'activité économique. Il correspond à la somme des valeurs ajoutées brutes nouvellement créées par les unités productrices résidentes une année donnée, évaluées au prix du marché. Il donne une mesure des richesses nouvelles créées chaque année par le système productif et permet des comparaisons internationales. Le PIB est publié à prix courants et en volume aux prix de l'année précédente chaînés. Son évolution en volume (c'est-à-dire hors effet de prix) mesure la croissance économique. Pour ces raisons, il est un bon indicateur pour mesurer le développement économique d'un pays. Toutefois, cet indicateur comporte également des limites. Premièrement son mode de calcul n'évalue que partiellement la richesse produite. En effet, de nombreuses activités ne rentrent pas en compte dans le calcul du PIB du fait qu'elles ne font l'objet d'aucune transaction sur le marché et que l'on ne peut donc pas les évaluer en termes monétaires. Il s'agit principalement du travail domestique et du bénévolat. Deuxièmement, le calcul du PIB suit la logique de l'addition et non pas de la soustraction. Les produits polluants qui détériorent l'environnement, le tabagisme ou les accidents sont enregistrés au titre de l'augmentation globale des richesses. Le PIB ne prend donc pas en considération la détérioration du capital écologique et du capital humain. Il reste donc un indicateur quantitatif qui ne prend pas en compte les aspects qualitatifs de la croissance.

2- Qu'est-ce qu'un pays économiquement ouvert ?

Une économie ouverte est une économie pour laquelle le commerce international se fait librement et prend une part importante dans le produit intérieur brut du pays. Cette ouverture s'accompagne généralement de mesures de libéralisation économique. Avec la mondialisation économique, le taux d'ouverture des économies est de plus en plus grand. Il est mesuré par le rapport de la valeur des échanges extérieurs au PIB (X+M)/2/PIB. Tous les pays ne sont pas ouverts sur l'extérieur de manière égale. Généralement, les pays dont le marché intérieur est développé (États-Unis, Japon) ont un degré d'ouverture peu élevé. A l'inverse, certains pays comme la Chine sont très ouverts sur l'extérieur, son industrie produit surtout pour l'exportation. Tous les secteurs d'une économie ne sont pas ouverts au même degré sur le reste du monde. Dans chaque pays, il existe des secteurs abrités et des secteurs exposés à la concurrence mondiale.

3- Quels sont les principaux déterminants de l'épargne ?

L'épargne des ménages peut être définie comme la différence entre le revenu disponible et la consommation. La décision d'épargner résulte donc en premier lieu d'un arbitrage entre consommation et épargne. Selon l'hypothèse keynésienne, l'épargne augmente en fonction du revenu (hypothèse contredite par Kuznets d'un point de vue macroéconomique). Les auteurs classiques considèrent que la propension à épargner dépend du taux d'intérêt. Enfin l'environnement socioéconomique tel que l'inflation, le niveau d'emploi (chômage) peuvent agir sur les comportements d'épargne.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

AVRIL 2020

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Économie

CORRIGÉ de L'ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE

Question 1

La masse salariale pour chacune des catégories de salariés est donnée dans la colonne 4 du tableau ci-dessous :

	Nombre	Salaire moyen	Masse salariale
Ouvriers	55	13 800,00	759 000,00
Employés	18	17 400,00	313 200,00
Cadres	9	24 600,00	221 400,00
Cadres supérieurs	4	48 500,00	194 000,00
Total	86		1 487 600,00

Le salaire moyen est 1.487.600 / 86 = 17.297,67

Question 2

Pour répondre à la question, on calcule le salaire moyen dans l'entreprise B. C'est la masse salariale totale divisée par le nombre de salariés, soit 1.473.400 / 80 = 18.417,50

Cette moyenne étant supérieure au salaire moyen de l'entreprise A calculé à la question précédente, l'affirmation proposée est juste.

Question 3

Pour répondre à la question, on calcule le salaire moyen des salariés de l'entreprise B par catégorie (colonne 3 du tableau ci-dessous) et on le compare à celui de l'entreprise A.

	Nombre	Salaire moyen
Ouvriers	37	13 300,00
Employés	23	16 500,00
Cadres	14	23 700,00
Cadres supérieurs	6	45 000,00
Total	80	

Pour les 4 catégories de salariés, le salaire moyen obtenu pour l'entreprise B est inférieur à celui de l'entreprise A. L'affirmation proposée est juste.

Question 4

L'entreprise A offre de meilleurs salaires moyens par catégorie. Le fait que le salaire moyen de l'entreprise B est supérieur à celui de l'entreprise A tient à la structure catégorielle : plus de cadres, moins d'ouvriers.

Question 5

Par catégorie, l'écart entre les salaires moyens de l'entreprise A et ceux de l'entreprise B est donné par la formule (salaire moyen de l'entreprise B – salaire moyen de l'entreprise A) / salaire moyen de l'entreprise A. Les données sont dans le tableau ci-dessous :

Salaire moyen	Ent A	Ent B	Ecart B/A
Ouvriers	13 800,00	13 832,00	0,23 %
Employés	17 400,00	17 160,00	-1,38 %
Cadres	24 600,00	24 648,00	0,20 %
Cadres supérieurs	48 500,00	46 800,00	-3,51 %

L'augmentation réalisée en 2020 dans l'entreprise B conduit à réduire l'écart entre les deux entreprises. Les ouvriers et cadres ont désormais un salaire moyen supérieur dans l'entreprise B. Attention toutefois, il ne s'agit que d'une moyenne. Cela ne signifie pas que chaque ouvrier touche mieux dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.

Question 6

52 salariés ont été augmentés sur les 80, soit une proportion de 65 % mais cette proportion n'est pas identique selon la catégorie. C'est ainsi que la part des cadres (cadres et cadres supérieurs) qui ont obtenu une augmentation est de 70 % (14 cadres ou cadres supérieurs sur 20) alors que cette proportion n'est que de 63,3 % (38/60) pour les salariés non cadres.

Commentaire : d'autres réponses sont possibles (test du Khi-2 par exemple)

Question 7

a) Moyenne = 4 %; Ecart type = 2,6 %

b) On peut réaliser 15 échantillons :

(X_1, X_2) ; (X_1, X_3) ; (X_1, X_4) ; (X_1, X_5) ; (X_1, X_6)

(X_2, X_3) ; (X_2, X_4) ; (X_2, X_5) ; (X_2, X_6)

(X_3, X_4) ; (X_3, X_5) ; (X_3, X_6)

(X_4, X_5) ; (X_4, X_6)

(X_5, X_6)

c) Les moyennes des (X_i, X_j) sont respectivement de 5 % ; 2 %; 6 % ; 3 % ; 4 % ; 3 % ; 7 % ; 4 % ; 5 % ; 4 % ; 1 % ; 2 % ; 5 % ; 6 % ; 3 %

Explicitation : le premier chiffre de 5 % correspond à la moyenne des augmentations obtenues par le couple (X_1, X_2)*.* X_1 *a obtenu une augmentation de 4 % et* X_2 *a obtenu une augmentation de 6 %*

d) La moyenne obtenue des 15 chiffres précédents est de 4 %, soit une moyenne identique à celle calculée à la question 1. Il n'y a pas de réponse attendue quant à la justification de ce résultat.